বিশ্লিষ্ট গণিত

এ. আই. এম. টি

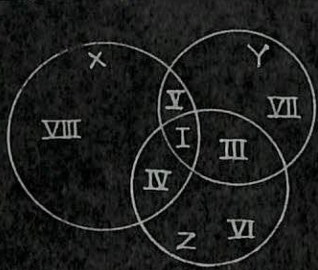
ওরিয়েন্ট লংম্যান

$x \cup (x \cap y) = x$
$x \cap (x \cup y) = x$

$x_1'x_2' + x_1'x_2 + x_1x_2' + x_1x_2 = \underline{1}$
$(x_1'+x_2')(x_1'+x_2)(x_1+x_2')(x_1+x_2) = \underline{0}$

P(A)

$\in$ $\cap$ $\notin$ $\subseteq$ $\cup$



p	q	p∧q	p∨q
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

$x \cup x = x$
$x \cap x = x$

p	∼p
T	F
F	T

+ $\emptyset$

বিশ্লিষ্ট গণিত

(DISCRETE MATHEMATICS)

বিশ্লিষ্ট গণিত

(DISCRETE MATHEMATICS)

[নবম শ্রেণী]

A. I. M. T.

ORIENT LONGMAN LIMITED
BOMBAY CALCUTTA MADRAS NEW DELHI
BANGALORE HYDERABAD

ওরিয়েণ্ট লংম্যান লিমিটেড

রেজিষ্টার্ড অফিস :

৩/৫ আফস আলী রোড, নয়াদিল্লী ১১০০০১

আঞ্চলিক অফিস :

নিকল রোড, ব্যালার্ড এস্টেট, বোম্বাই ৪০০০১

১৭ চিত্তরঞ্জন অ্যাভিনিউ, কলিকাতা ৭০০০১৩

৩৬এ মাউণ্ট রোড, মাদ্রাজ ৬০০০০২

বি-৩/৭ আফস আলী রোড, নয়াদিল্লী ১০১০০১

৮০/১ মহাত্মা গান্ধী রোড, বাঙ্গালোর ৫৬০০০১

৩-৫-৮২০ হায়দার গুডা, হায়দ্রাবাদ ৫০০০০১

প্রথম প্রকাশ : আগস্ট ১৯৭৪

মুদ্রক : শ্রীপঞ্চানন পাল

লক্ষ্মীশ্রী প্রেস

১৫/১ ঈশ্বর মিল লেন, কলিকাতা-৬

প্রকাশক : শ্রী এন্ ভেঙ্কু আয়্যার

আঞ্চলিক ম্যানেজার

ওরিয়েণ্ট লংম্যান লিমিটেড

১৭ চিত্তরঞ্জন অ্যাভিনিউ, কলিকাতা-১৩

প্রাক্‌কথন

নতুন পাঠক্রম প্রবর্তিত হলে নতুন পাঠ্যপুস্তক রচনা স্বাভাবিকভাবেই অবশ্যকর্তব্য হয়ে ওঠে, বিশেষ করে, যখন পাঠক্রম মারফত সম্পূর্ণ অ-সনাতনী ও নতুন ভাবধারার আবাহনে সক্রিয় প্রয়াস থাকে। পাঠক্রমে তথ্যগত বা তত্ত্বগত বিন্যাসের অসংগতি থাকলেও উৎসাহী শিক্ষকদের মধ্যে নতুন সাড়া জাগে, বিশেষত তাঁদের মধ্যে, যাঁরা নতুন চিন্তাধারার সঙ্গে অন্তত আংশিকভাবেও অবহিত হয়েছেন। মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ কর্তৃক 'Discrete Mathematics' (বিশ্লিষ্ট গণিত) নামক ঐচ্ছিক গণিতের পাঠক্রম প্রবর্তনে শিক্ষকদের মধ্যে অনুরূপ উৎসাহ বিভিন্ন প্রশিক্ষণ শিবিরের মাধ্যমে সুস্পষ্টরূপে পরিলক্ষিত হয়েছে। এই উদ্দীপনাকে একটি সুসংহত ও স্থায়ী রূপ দেওয়া যায় পুস্তক মারফত—এটি আমাদের সংস্থার দৃঢ় বিশ্বাস। তাই পাঠক্রম ঐচ্ছিক হলেও আমাদের সংস্থা এই পুস্তক প্রণয়নে ব্রতী হয়েছে।

সামগ্রিকভাবে পর্ষৎ কর্তৃক প্রবর্তিত পুরো পাঠক্রমে কতখানি আধুনিকীকরণ সার্থক হয়েছে সেটি বিচার ও আলোচনা সাপেক্ষ হলেও, উপরোক্ত ঐচ্ছিক পাঠক্রমে কিছু নতুন ভাবনা-চিন্তার অবকাশ আছে। যন্ত্র-গণক (computer)-এর সঙ্গে মাধ্যমিক পর্যায়ে পরিচিতি ঘটানোই এই পাঠক্রমের মূল উদ্দেশ্য বলে মনে হয় এবং অন্যান্য অংশগুলি এই মূল বিষয়টির আনুষঙ্গিক হিসাবে পরিগণিত হয়েছে। এই চিন্তাধারার পরিপ্রেক্ষিতে বিদ্যালয়-স্তরে বিষয়ের সুষ্ঠু অবতারণা করা একটি দুরূহ কর্ম, বিশেষ করে যখন উপযুক্ত পরিভাষার অভাব আছে। পুস্তকটি দুই খণ্ডে প্রকাশিত হবে—প্রথম খণ্ডের রচয়িতা আমাদের সংস্থার দুইজন সক্রিয় সদস্য ডক্টর অমিয়ভূষণ রায় (যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়) এবং ডক্টর প্রণবকুমার সরকার (বিবেকানন্দ কলেজ, কলিকাতা)। প্রথম খণ্ডের মুখ্য বিষয়বস্তু সম্পর্কে ডক্টর রায় ও ডক্টর সরকার সংক্ষেপে আলোচনা করেছেন কয়েক পৃষ্ঠা পরে। এই দুইজন প্রত্যক্ষভাবে অংশগ্রহণ করলেও, পুস্তকের বর্তমান রূপ ধারণে অনেকের অবদান আছে। এইজন্য এঁরা সবাই আমাদের সংস্থার ধন্যবাদার্হ। ডক্টর

রায় ও ডক্টর সরকার তাঁদের অমূল্য সময় নষ্ট করে আমাদের সংস্থাকে কৃতজ্ঞতাপাশে আবদ্ধ করেছেন। আমাদের প্রকাশক ও তাঁদের কর্মীবৃন্দকে এই সুযোগে ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছি, কারণ সম্পূর্ণ নতুন ধাঁচের পুস্তক প্রকাশনের ঝুঁকি গ্রহণ করায় তাঁদের সাহস ও প্রেরণা অনেকখানি প্রশংসার্হ।

আমাদের সংস্থা আশা করে, সমগ্র শিক্ষকসমাজে ও ছাত্রসমাজে এই পুস্তকটি সমাদৃত হবে। পুস্তকটির সমৃদ্ধি ও উৎকর্ষের জন্য যে-কোন প্রকার উপদেশ বা বক্তব্য আমরা সাদরে গ্রহণ করব।

২৫ ফার্ন রোড
কলিকাতা—১৯
১২. ৮. ১৯৭৪

সাধারণ সচিব
এ. আই. এম. টি.
(A. I. M. T.)

ভূমিকা

বিদ্যালয় পাঠক্রমে সেটতত্ত্ব, বুলিয় অ্যালজেব্রা ও প্রতীকী ন্যায়-এর সংযোজন ইতিপূর্বে ঘটেনি। মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ কর্তৃক 'DISCRETE MATHEMATICS' (বিশ্লিষ্ট গণিত) নামক ঐচ্ছিক গণিতের পাঠক্রমে উপরোক্ত তিনটি বিষয়ের কিছু কিছু অংশ অন্তর্ভুক্ত হয়েছে। এই ধরনের বিষয়বস্তু বিদ্যালয় পর্য্যায়ে চিত্তাকর্ষক উপায়ে পরিবেশন বেশ দুরূহ কর্ম। এ. আই. এম. টি. শিক্ষকদের বিশ্লিষ্ট গণিত পাঠদানের উপযোগী করার জন্য কয়েকটি প্রশিক্ষণ শিবিরের ব্যবস্থা করে। শিক্ষকদের সমস্যা এবং বিষয়গুলি ছাত্রদের বোধগম্য করার জন্য কি ধরনের পাঠ্যপুস্তক প্রয়োজন সে সম্বন্ধে অবহিত হওয়ার সুযোগ আমাদের উভয়েরই ঘটে এই শিবির গুলিতে অধ্যাপনার মাধ্যমে এবং এ. আই. এম. টি.-র অনুরোধ-ক্রমে এই পুস্তক রচনায় ব্রতী হয়েছি। বাংলায় এইপ্রকার পুস্তক রচনা বেশ কঠিন কাজ; তাছাড়া যথোপযুক্ত পরিভাষার বিশেষ অভাব রয়েছে। সম্ভাব্য পরিভাষা নির্ধারণের জন্য আমাদের অনেকে ব্যক্তিগতভাবে সাহায্য করেছেন; বিশেষ করে এ. আই. এম. টি.-র পরিভাষা প্যানেলের বেশ কয়েকজন সদস্য। এই পুস্তকের শুরুতেই বিধিবদ্ধ সংজ্ঞা (formal definition)'র উপর জোর দেওয়া হয়নি। বাস্তবমুখী ও জীবন ভিত্তিক উদাহরণের সাহায্যে বিষয়গুলির ধারণা দেওয়ার চেষ্টা হয়েছে যাতে এগুলির সজ্ঞাত সংজ্ঞা (intuitive definition) সুস্পষ্ট হয়ে উঠে এবং বিধিবদ্ধ সংজ্ঞার অবতারণার পথ সুগম হয়। প্রতিটি বিষয়ের উপর বহু উদাহরণ দেওয়া হয়েছে এবং বিষয়গুলির ধারণা সুস্পষ্ট হয়েছে কি না তা পরীক্ষার জন্য প্রতিটি অধ্যায়ে বেশ কিছু সংখ্যক প্রশ্ন দেওয়া হয়েছে। পুস্তকটি তিনটি অধ্যায়ে বিভক্ত। প্রথম অধ্যায়ে সেট ও তার কিছু ধর্ম। প্রথমে বহু জীবনকেন্দ্রিক উদাহরণের সাহায্যে সেট, উপসেট, শূন্য সেট, সার্বিক সেট, বিভিন্ন সেট প্রক্রিয়ার ধারণা দেওয়া হয়েছে এবং পরে ভেনচিত্রের সাহায্যে এ গুলির জ্যামিতিক চিত্র দেওয়া হয়েছে এবং সর্বশেষে বিধিবদ্ধভাবে সেট-এর নানা সূত্র প্রমাণ করা হয়েছে। উপসেট ও তার ধর্মের সহায়তায় বেশ কিছু যুক্তাশ্রয়ী প্রশ্নের সমাধান করা হয়েছে। দ্বিতীয় অধ্যায়—বুলিয় অ্যালজেব্রা, বুলিয় অপেক্ষক, বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষক, যৌগিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষকও সরলীকরণ। অ্যালজেব্রা কাকে বলে, সাধারণ অ্যালজেব্রা ও বুলিয় অ্যালজেব্রার মধ্যে কি মিল আছে

তা বিশেষভাবে আলোচনা করা হয়েছে। বুলিয় অ্যালজেব্রার ধর্মগুলি যথাসম্ভব সহজবোধ্য করে প্রমাণ করা হয়েছে। বৈকল্পিক স্বভাবী আকার (disjunctive normal form) ও যৌগিক স্বভাবী আকার (conjunctive normal form)-এর অপেক্ষকগুলির বিশদ আলোচনা করা হয়েছে। এই অপেক্ষকগুলির দু'রকম সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। আশা করা যায় শেষোক্ত সংজ্ঞাটি উৎসাহী ছাত্রদের খুবই চিত্তাকর্ষক হবে। পুস্তকটির কলেবরের কথা স্মরণ করে বহু বিষয়বস্তু অধ্যায়টিতে সংযোজন করা হয়নি। তৃতীয় অধ্যায়—গাণিতিক ন্যায় বা প্রতীকী ন্যায়। প্রথমে প্রতিজ্ঞা ও বাক্য সম্বন্ধে ধারণা দেওয়া হয়েছে, পরে তিনটি যৌক্তিক সংযোজকের কথা বলা হয়েছে। যৌক্তিক সংযোজকগুলির সংজ্ঞা সারণি আকারে সত্যমানের সহায়তায় দেওয়া হয়েছে। সকল প্রতিজ্ঞা সমূহের সেট যে একটি বিশেষ ধরনের, বুলিয় অ্যালজেব্রা গঠন করে তা দেখানো হয়েছে। এ ছাড়া আরও দুটি সংযোজক এবং তার সহায়তায় কনভার্স, ইনভার্স ইত্যাদির ধারণা সারণি ও বিভিন্ন উদাহরণের সাহায্যে তুলে ধরা হয়েছে। পুস্তকে ব্যবহৃত পরিভাষার যাথার্থ সম্বন্ধে আলোচনার অবকাশ থাকলেও পাঠের সুবিধার জন্য পরিভাষার একটি তালিকা পুস্তকান্তে দেওয়া হয়েছে। স্বল্প সময়ে রচনাটির সমাপ্তির কাজ অস্বাভাবিকভাবে ত্বরান্বিত করার জন্য ত্রুটির সম্ভাবনা রয়েছে। যদি পাঠক সমাজ ও ছাত্র সমাজ পুস্তকটির গুণগত মান যাচাই করে দেখেন এবং উৎকর্ষতা বৃদ্ধির জন্য যদি কোন উপদেশ বা বক্তব্য দেন তা আমরা সাদরে গ্রহণ করবো। পুস্তকটি রচনাকালে কয়েকটি বিদেশী গ্রন্থ ব্যবহার করা হয়েছে।

ডঃ দিলীপ কুমার সিংহ (যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়), ডঃ বীরেশ্বর রায়চৌধুরী (বালিগঞ্জ রাষ্ট্রীয় বিদ্যালয়), ডঃ সনৎ কুমার সরকার (যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়), ডঃ তরুণ কুমার মুখোপাধ্যায় (যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়), ডঃ পরেশচন্দ্র ভক্ত (যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়) নানা উপদেশ দিয়ে সাহায্য করেছেন ; এঁরা আমাদের ধন্যবাদার্হ।

১৫ই আগষ্ট, ১৯৭৪
কলিকাতা

অমিয় ভূষণ রায়
(গণিত বিভাগ, যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়)

প্রণব কুমার সরকার
(গণিত বিভাগ, বিবেকানন্দ কলেজ)

এই পুস্তকে ব্যবহৃত প্রতীক ও চিহ্নের তালিকা

প্রতীক বা চিহ্ন	ব্যবহৃত অর্থ
1. $\in$	$a \in$ A-এর অর্থ পদ a সেট A-তে অন্তর্ভুক্ত
2. $\notin$	$a \notin$ A-এর অর্থ পদ a সেট A-তে অন্তর্ভুক্ত নয়
3. $\{x : P(x)\}$	সেটের পদগুলি x এবং এরা $P(x)$ শর্তটি পূরণ করে।
4. $a < x < b$	সকল সংখ্যা x যারা a-এর চেয়ে বড় এবং b-এর চেয়ে ছোট।
5. $a \leqslant x \leqslant b$	সকল সংখ্যা x যারা a-এর সমান বা a-এর চেয়ে বড় এবং b-এর সমান বা b-এর চেয়ে ছোট।
6. N	সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট
I বা J	সকল পূর্ণসংখ্যার সেট,
Q	সকল মূলদ রাশির সেট,
R	সকল বাস্তব রাশির সেট।
7. $B \subseteq A$	B সেট A-সেটের উপসেট বা A সেট B সেটকে ধারণ করে
বা $A \supseteq B$	B সেট A সেটে অন্তর্ভুক্ত।
$B \subset A$	B সেট A সেটের প্রকৃত উপসেট বা B সেট A সেটের যথার্থ উপসেট।
8. ϕ বা { }	শূন্য সেট
9. U	সার্বিক সেট
10. P(A)	A সেটের পাওয়ার সেট বা সূচক সেট,
11. $\cup$	$A \cup B$-এর অর্থ A ও B সেটের যোগ,
$\cap$	$A \cap B$-এর অর্থ A ও B সেটের ছেদ বা অন্তর,
A'	A-এর পূরক
12. $A \cap B = \phi$	A ও B-এর ছেদ শূন্য সেট,
13. $A - B$	A ও B-এর অন্তর
14. $n(A)$	A সেটের পদসংখ্যা

15.	(B ; +, ., ′)	B সেট '+' '.' ও '′' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা
16.	$p \wedge q$	p এবং q
	$p \vee q$	p অথবা q
	$\sim$ বা $'$	$\sim p$ বা p'-এর অর্থ p প্রতিজ্ঞার নঞর্থক প্রতিজ্ঞা
17.	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$ অর্থাৎ p থেকে qতে আসা যায়
18.	$\longleftrightarrow$	$p \longleftrightarrow q$-এর অর্থ p থেকে q এবং q থেকে pতে আসা যায়।

জর্জ ক্যাণ্টর (George Cantor 1845—1918)

সেট তত্ত্বের জনক জর্জ ফার্ডিনাণ্ড ফিলিপ্ ক্যাণ্টর (George Ferdinand Phillip Cantor) 1845 খৃস্টাব্দে সোভিয়েট রাশিয়ার সেণ্ট পিটার্সবার্গ (অধুনা লেনিনগ্রাদ) শহরে জন্মগ্রহণ করেন। তাঁর পিতা যৌবনে ডেনমার্কের কোপেনহেগেন ছেড়ে সেণ্ট পিটার্সবার্গে ব্যবসা শুরু করেন। তাঁর পিতার অসুস্থতার জন্য ডাক্তারের পরামর্শে ক্যাণ্টর পরিবার 1856 খৃস্টাব্দে পিটার্সবার্গ ত্যাগ করে জার্মানিতে বসবাস শুরু করে। জুরিখ্, বার্লিন ও গটিন্‌গ্যোন্ বিশ্ববিদ্যালয়ে তিনি পড়াশুনা করেন। গটিন্‌গ্যোন্ বিশ্ববিদ্যালয়ে অধ্যয়নকালে বিখ্যাত গণিতজ্ঞ ভায়েরস্ট্রাস্ (Weier-strass)-এর সংস্পর্শে আসেন এবং এর প্রভাবে তিনি গণিতের গবেষণায় নিযুক্ত হন। 1874 খৃস্টাব্দে তিনি হাল্ বিশ্ববিদ্যালয়ের টিউটরের পদ লাভ করেন। এ সময় তাঁর সেট তত্ত্বের যুগান্তকারী গবেষণা প্রবন্ধ প্রকাশিত হয়। তাঁর মৌলিক গবেষণা পত্র খুবই উচ্চাঙ্গের ছিল এবং গণিতের প্রচলিত তৎকালীন বহু ধারণা হতে সেগুলি ছিল সম্পূর্ণ ভিন্ন ধরনের। ফলে তাঁর গবেষণা নিয়ে খুবই বিতর্ক শুরু হয়। এই বিতর্ক ও সমালোচনা সহ্য করতে না পারায় 1884 খৃস্টাব্দে তাঁর মানসিক ভারসাম্য নষ্ট হয়। পরবর্তী জীবনে তিনি কখনই সম্পূর্ণ সুস্থ হতে পারেন নি। কিন্তু এই অসুস্থতা সত্ত্বেও তিনি গণিতে যে মৌলিক অবদানগুলি রেখে গেছেন তা চিরদিন ভাস্বর হয়ে থাকবে। 1918 খৃস্টাব্দে হাল্ শহরে এক হাসপাতালে তাঁর মৃত্যু হয়।



জর্জ বুল (George Boole 1815—1864)

প্রতীকী তর্কবিদ্যার ও বুলিয় অ্যালজেব্রার স্রষ্টা জর্জ বুল ইংলণ্ডের লিঙ্কন নামক স্থানে 1815 খৃস্টাব্দের 2রা নভেম্বর জন্মগ্রহণ করেন। দরিদ্র পরিবারে তাঁর জন্ম হলেও নিজের চেষ্টায় তিনি অল্প বয়সেই একজন প্রকৃত বিদগ্ধ গণিতজ্ঞ হিসাবে পরিচিত হন। পিতার তত্ত্বাবধানে তাঁর বাল্যশিক্ষা শুরু হয়। বুলের পিতা যদিও ব্যবসায়ী ছিলেন, গণিতে ও গতিবিদ্যায় তাঁর বিশেষ আগ্রহ ছিল। ষোল বৎসর বয়সে লিঙ্কনের এক বিদ্যালয়ে তিনি শিক্ষকতা গ্রহণ করেন এবং এ সময়েই ফরাসী, জার্মান, ইতালীয়, প্রাচীন গ্রীক ও লাতিন ভাষায় জ্ঞান অর্জন করেন। কুড়ি বৎসর বয়সে বুল নিজেই লিঙ্কনে একটি স্কুল প্রতিষ্ঠা করেন এবং এ সময় থেকেই নিজেকে সম্পূর্ণভাবে গণিতের চর্চায় নিযুক্ত করেন। মাত্র চৌত্রিশ বৎসর বয়সে তাঁর বিশেষ বন্ধু অগাস্টাস্ ডি-মরগানের সহায়তায় কর্কে (Cork) অবস্থিত কুইন্স কলেজে গণিতের অধ্যাপক পদ লাভ করেন এবং জনপ্রিয় শিক্ষক-



রূপে পরিচিত হন। পরবর্তীকালে তাঁর গবেষণার স্বীকৃতি স্বরূপ এডিনবার্গ রয়েল সোসাইটি তাঁকে বিশেষ সম্মানে ভূষিত করেন। 1855 খৃস্টাব্দে স্যার জর্জ এভারেস্টের (যাঁর নামানুসারে Mount Everest নাম হয়) ভ্রাতুষ্পুত্রী মেরী এভারেস্টের সহিত বিবাহ হয়। বিবাহের এক বৎসর পূর্বেই 1854 খৃস্টাব্দে 'An Investigation of the Laws of Thought' নামক যুগান্তকারী গবেষণা প্রবন্ধ রচনা করেন যার উপর ভিত্তি করে পরবর্তীকালে বুলিয় অ্যালজেব্রা (Boolean Algebra) ও প্রতীকী তর্কবিদ্যা (Symbolic Logic) বা গাণিতিক তর্কবিদ্যা নামক নূতন শাখার জন্ম হয়। এই গবেষণা-প্রবন্ধ জর্জ বুলকে সম্মানের সর্বোচ্চ শিখরে প্রতিষ্ঠা করে। 1864 খৃস্টাব্দে নিউমোনিয়া রোগে আক্রান্ত হয়ে তিনি হঠাৎ মারা যান।

SYLLABUS

Class—IX

1. *Algebra of Sets* : Element and set, basic operations ; Union, intersection, Complement, Venn diagrams, Fundamental laws of Algebra of Sets, Principle of duality.

2. *Boolean Algebra* : Definition and properties, Disjunctive and Conjunctive forms, Boolean functions and their simplification.

3. *Symbolic Logic and Algebra of propositions* ; Symbols, propositions, Truth tables, Object Logic and Syntax Logic, Implication and equivalence. Truth sets for propositions

সূচীপত্র

বিশ্লিষ্ট গণিত

প্রথম অধ্যায়

সেট (Set) ও পদ (Element)

বিগত কয়েক দশকে গণিতের পরিসীমার অবিশ্বাস্য বিস্তৃতি ঘটেছে এবং বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখার উন্নয়নে গণিতের অবদান অপরিসীম বৃদ্ধি পেয়েছে। ইদানীং অর্থনীতি, শারীরবিদ্যা, ন্যায়বিদ্যা, বাণিজ্যবিজ্ঞান, সমাজবিজ্ঞান, সম্ভাব্যতা-তত্ত্ব (Probability theory) প্রভৃতি শাখায় গণিতের বহুল প্রয়োগ উত্তরোত্তর অপরিহার্য হয়ে উঠেছে। গণিতের যে সব মূল ধারণাগুলির প্রয়োগ এইসব শাখায় দেখা যায় সেটতত্ত্ব (Set theory) তাদের মধ্যে অন্যতম। গত শতাব্দীর শেষ দিকে এই বৈপ্লবিক তত্ত্বের সংযোজন হয়। এই তত্ত্বের জন্মদাতা হলেন বিশ্ববিখ্যাত জর্মন গাণিতিক গ্যেয়র্গ ক্যান্টর (Georg Cantor, 1845-1918)। বর্তমান গ্রন্থের আওতার মধ্যে সেটতত্ত্বের আলোচনা বিধিবদ্ধভাবে (formal way) করা সম্ভব নয়। এজন্য স্বজ্ঞাত (intuitive) পদ্ধতির মাধ্যমে বিষয়টির কয়েকটি দিক আলোচনা করা হয়েছে।

1.1. সেট (Set) ও পদ (Element):

আমরা দৈনন্দিন জীবনে কতিপয় বস্তুর সংকলন (collection)-কে বিভিন্ন নামে ব্যক্ত বা অভিহিত করি। যেমন এক সেট বই, এক সেট কাপ ডিস্, এক ঝাঁক পায়রা, এক সারি তাল গাছ, একদল খেলোয়াড়, এক গুচ্ছ গোলাপ ইত্যাদি। এই সকল কথায় 'সেট', 'ঝাঁক', 'সারি', 'দল', 'গুচ্ছ' প্রভৃতি বিভিন্ন শব্দগুলির প্রয়োগ দ্বারা বিভিন্ন বস্তুর সংকলনকে বোঝানো হচ্ছে। গণিতে 'সেট' শব্দটি আরও সুনির্দিষ্ট ও ব্যাপক অর্থে প্রযুক্ত হয়। একটি সুসংজ্ঞাত (well defined) সংকলন বোঝাতে 'সেট' কথাটি ব্যবহৃত হয়। কোনও সংকলনকে 'সুসংজ্ঞাত' তখনই বলব যখন কোন বস্তু সম্বন্ধে সুনির্দিষ্ট-ভাবে বলা সম্ভব যে বস্তুটি সংকলনের অন্তর্ভুক্ত কিংবা অন্তর্ভুক্ত নয়। সুতরাং

কোন বস্তুর সংকলনকে সেট আখ্যা দেওয়া যেতে পারে যদি সংকলনটি তিনটি সর্ত পূরণ করে :

(*a*) সংকলনটি সুসংজ্ঞাত হবে

(*b*) সংকলনের যে-কোন দুটি বস্তু স্বতন্ত্র হবে

(*c*) সংকলনটি বস্তুগুলির ক্রম বিন্যাসের (order) উপর নির্ভরশীল হবে না।

প্রকৃতপক্ষে সেট-এর সংজ্ঞা দেওয়া বর্তমানে সমীচীন নয়। সাধারণত ইংরেজী বর্ণমালার বড় হরফ (capital letter) A, B, C, P, Q, Y ইত্যাদির দ্বারা সেটকে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ 1. ধরা যাক, 24-এর সকল উৎপাদকগুলিকে একত্রিত করে একটি সংকলন তৈরি করা হল। এই সংকলনটিকে সেট বলা যায় কারণ কোন্ কোন্ অখণ্ড সংখ্যা এই সংকলনে আছে তা সুনির্দিষ্টভাবে বলা সম্ভব। বস্তুতঃ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 এবং 24 ছাড়া সংকলনে কিছু নেই। এছাড়া সংকলনের প্রতিটি সংখ্যা স্বতন্ত্র। যদি সংকলনটি অন্যভাবে লেখা হয় যেমন 6, 8, 24, 1, 4, 12, 2, 3 তাহলে সংখ্যাগুলির ক্রমের পরিবর্তন হচ্ছে কিন্তু সংকলনটির কোন সামগ্রিক পরিবর্তন হচ্ছে না। এক কথায় সংকলনটিতে বস্তুগুলির ক্রমের কোন গুরুত্ব নেই। সুতরাং 24-এর উৎপাদকগুলির সংকলনকে একটি সেট বলতে পারি বা 24-এর উৎপাদকগুলির সংকলন একটি সেট।

উদাহরণ 2. পশ্চিমবঙ্গের দশজন সহৃদয় ব্যক্তিদের নিয়ে যে সংকলন গঠন করা যায় তা সেট হবে কিনা দেখা যাক। দশজন সহৃদয় ব্যক্তি বর্তমানের না অতীতের তা পরিষ্কারভাবে বলা যাচ্ছে না। তাছাড়া দশজন সহৃদয় ব্যক্তি কারা তা সুনির্দিষ্টভাবে স্থির করা সম্ভব হবে না ; কেননা একজনের মতে যাঁরা সহৃদয় অন্যের মতে তাঁরা সহৃদয় নাও হতে পারেন। সুতরাং সংকলনটি সুসংজ্ঞাত নয়। অতএব 'পশ্চিমবঙ্গের দশজন সহৃদয় ব্যক্তি' এই বাক্যটি যে সংকলনের কথা প্রকাশ করছে তা সেট নয়।

নিম্নে সেট-এর আরও কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল :

1. পশ্চিমবঙ্গের জেলা সমূহের সেট ;
2. ভারতবর্ষের সব সার কারখানাগুলির সেট ;

3. ভারতবর্ষের সকল রাষ্ট্রায়ত্ত কয়লা খনিগুলির সেট ;

4. 1972-এর 31শে ডিসেম্বর পর্যন্ত টেষ্ট ম্যাচে অংশ গ্রহণকারী সব ভারতীয় ক্রিকেট খেলোয়াড়দের সেট ;

5. সূর্যের সকল গ্রহের সেট ;

6. ইংরেজী মাস সমূহের সেট ;

7. বাংলা ভাষায় স্বরবর্ণ সমূহের সেট ;

8. 24 এবং 36-এর মধ্যে যতগুলি মৌলিক সংখ্যা (prime number) আছে তাদের সেট ;

9. সকল স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural number)-র সেট ;

10. সকল পূর্ণসংখ্যা (Integer)-র সেট ;

11. সকল মূলদ (Rational) রাশির সেট ;

12. সকল অমূলদ রাশি (Irrational number)-র সেট ;

13. 0 এবং 1-এর মধ্যে অবস্থিত সকল মূলদ রাশির সেট ;

14. একটি সরল রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট ;

15. একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত বিন্দুগুলির সেট ;

16. একই তলে অবস্থিত ত্রিভুজ সমূহের সেট ।

এখন কয়েকটি সংকলনের উল্লেখ করা যাক যাদের সেট বলা যাবে না। যেমন, (*a*) ভারতের খ্যাতনামা বিজ্ঞানী ; (*b*) আকাশের সব তারা ; (*c*) একটি গ্রামের সব দুরন্ত শিশু ; (*d*) গ্রন্থাগারের সব পুস্তক ; (*e*) মানুষের সব আশা ও আকাঙ্খা ।

এই সংকলনগুলির কোনটিই সেট নয় কেননা সংকলনগুলি সুসংজ্ঞাত নয়। যেমন ভারতীয় বিজ্ঞানীদের সংকলনে অতীত কি বর্তমান বিজ্ঞানীদের কথা বলা হচ্ছে তা সঠিকভাবে বলা যাচ্ছে না। এছাড়া কোন্ কোন্ বিজ্ঞানীদের খ্যাতনামা বলা যাবে তা স্থির করা যাচ্ছে না। এজন্য 'ভারতের খ্যাতনামা বিজ্ঞানী' এই বাক্যটি যে সংকলনের নির্দেশ দেয় তা সুসংজ্ঞাত নয়। অতএব এই সংকলনটি সেট নয়। এইভাবে যুক্তি দ্বারা বলা যায় যে উপরোক্ত বাকি সংকলনগুলিও সেট নয়।

পদ (Element) : কতকগুলি বস্তুর সংকলন একটি সেট গঠন করলে ঐ বস্তুগুলির প্রত্যেকটিকে সেটের **পদ** (Element or member) বলা হয়। ইংরেজী ছোট অক্ষর a, b, c, p ইত্যাদির দ্বারা সেটের পদ প্রকাশ করা হয়।

কোন বস্তুকে একটি সেটের পদ হিসাবে বোঝানোর জন্য $\in$ (এপ্সাইলন্) প্রতীক চিহ্নটি ব্যবহৃত হয়। যদি কোন বস্তু সেটের পদ না হয় অর্থাৎ বস্তুটি সেটে অন্তর্ভুক্ত না হয় তাহলে $\notin$ চিহ্নটি দ্বারা তা প্রকাশ করা হয়। যদি A একটি সেট সূচিত করে এবং 'a' সেটটির পদ হয় তাহলে লেখা হয় $a \in A$ এবং যদি 'b' সেটটির পদ না হয় তাহলে লেখা হয় $b \notin A$.

[$a \in A$-কে এভাবে পড়া হয়ঃ 'a' সেট A-এর পদ বা 'a' সেট A-তে অন্তর্ভুক্ত বা ইংরেজীতে 'a' belongs to A.

$a \notin A$-কে এভাবে পড়া হয়ঃ 'a' সেট A-এর পদ নয় বা 'a' সেট A-তে অন্তর্ভুক্ত নয় বা ইংরেজীতে 'a' does not belong to A.]

যদি A দ্বারা 1, 2, 3, 5, 19, 29 মৌলিক সংখ্যাগুলির সেট বোঝানো হয় তাহলে বলা যায় $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$, $5 \in A$, $19 \in A$, $29 \in A$ কিন্তু $4 \notin A$, $10 \notin A$, $16 \notin A$, $\frac{1}{2} \notin A$, $-12 \notin A$. $-\frac{7}{3} \notin A$ ইত্যাদি।

1.2. সসীম সেট, অসীম সেট (Finite set, infinite set) :

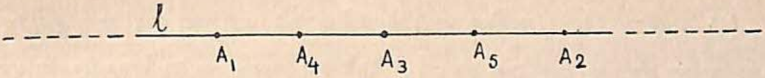
যদি S দ্বারা তোমাদের স্কুলের সব বর্তমান ছাত্রদের সেটকে বোঝানো হয় তাহলে তোমাদের স্কুলে যে-কোন ক্লাশের ছাত্র S-এর পদ হবে এবং তোমরা গণনা (counting)-র দ্বারা বলতে পারবে S সেটের পদসংখ্যা অর্থাৎ স্কুলের ছাত্রসংখ্যা কত। অর্থাৎ S সেটের পদসংখ্যা গণনার দ্বারা নির্ণয় করা সম্ভব। আবার যদি N দ্বারা সব স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural number)-র সেটকে বোঝানো হয় তাহলে 2, 3, 5, 10 ইত্যাদি সংখ্যাগুলি N-এর পদ এবং এই সেটটির পদসংখ্যা গণনার দ্বারা নির্ণয় করা সম্ভব নয়। যদি কোন সেট-এর পদগুলি গণনা করা সম্ভব হয় তাহলে সেটটিকে **সসীম সেট** (Finite set) বলা হয়। যে সেটের পদগুলির সংখ্যা গণনার দ্বারা নির্ণয় করা সম্ভব নয় সেই সেটকে **অসীম সেট** (Infinite set) বলা হয়।

উদাহরণ

1. (a) P যদি তোমাদের গ্রামের জীবিত ব্যক্তিদের সেট বোঝায়, তাহলে P সেটটি সসীম কেন না তোমাদের গ্রামের জীবিত ব্যক্তিদের সংখ্যা গণনা দ্বারা সুনিশ্চিতভাবে নির্ধারণ করা সম্ভব।

(b) 'RADIO' শব্দটির সব অক্ষর সমূহের সেটটিও সসীম,

(c) 1 হইতে 50-এর মধ্যে অবস্থিত সব মৌলিক সংখ্যার সেট একটি সসীম সেট।



চিত্র-1

2. $\overline{A_1A_2}$ l সরলরেখার একটি অংশ অর্থাৎ $\overline{A_1A_2}$ একটি রেখাংশ (line segment). $\overline{A_1A_2}$ রেখাংশের উপর অবস্থিত সব বিন্দুগুলি একটি সেট গঠন করে। মনে কর $\overline{A_1A_2}$-র মধ্যবিন্দু A_3, তাহলে A_3 এই সেটে অন্তর্ভুক্ত। অনুরূপভাবে, A_1A_3-র মধ্যবিন্দু A_4 এবং $\overline{A_3A_2}$-র মধ্যবিন্দু A_5 (চিত্র-1) সেটটির পদ। এইভাবে পর্যায়ক্রমে রেখাংশটির যে সকল ক্ষুদ্র অংশ পাওয়া যাবে তাদের প্রত্যেকটির মধ্যবিন্দুগুলি সেটটিতে থাকবে। বস্তুতঃ $\overline{A_1A_2}$ থেকে যতগুলি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশ পাওয়া যাবে তাদের মধ্যবিন্দুসমূহের নির্ণয় কোনকালেই শেষ হতে পারে না। অতএব $\overline{A_1A_2}$ রেখাংশের উপর অবস্থিত সব বিন্দুগুলির সেট একটি **অসীম** সেট।

[বিমূর্ত গণিতে অসীম সেটের একটি বিশিষ্ট ভূমিকা আছে। পরে গণিত শেখার সময় জানতে পারবে অসীম সেটের প্রয়োজনীয়তা এবং অসীম সেট সম্বন্ধে ক্যাণ্টরের অবিস্মরণীয় গবেষণার কথা।]

1.3. সেট-এর প্রকাশরীতিঃ

(a) যখন সেট-এর সব পদগুলি জানা থাকে তখন পদগুলিকে দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে লিখে সেটটিকে প্রকাশ করা হয়। সেট প্রকাশের এই পদ্ধতিকে তালিকা পদ্ধতি (Roster method) বলে। যেমন সপ্তাহের সব দিনগুলির সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে এইভাবে লেখা যায়ঃ—{ রবিবার, মঙ্গলবার, শনিবার, শুক্রবার, সোমবার, বুধবার, বৃহস্পতিবার }। এভাবে ইংরেজী বর্ণমালার স্বরবর্ণের সেটকে লেখা যায় $\{a, e, i, o, u\}$; 10 থেকে 30 পর্যন্ত সব বিজোড় সংখ্যার সেটকে লেখা যায় {11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29} ; সব স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে লেখা যায় ; {1, 2, 3, 4, 5, ······}.

[এক্ষেত্রে সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেটটি অসীম। এই সেটটির সকল পদকে বন্ধনীর মধ্যে লেখা সম্ভব নয় এজন্য সেটটিকে তালিকা আকারে

প্রকাশের জন্য কয়েকটি পদকে লিখে পরে ডট্ দেওয়া হয় এবং এগুলিকে দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে রাখা হয়।]

(b) কোন কোন অসীম সেট ও সসীম সেট তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করা অনেক সময় সুবিধাজনক হয় না। এই সব ক্ষেত্রে সেটের পদগুলির মধ্যে যে এক বা একাধিক ধর্ম (property) বিদ্যমান আছে তার উল্লেখ করে সেটকে প্রকাশ করা হয়। সেট-এর এই প্রকাশরীতিকে প্রতীক প্রকাশ বা Set **builder notation** বলে। যেমন 10 থেকে 30-এর মধ্যে সব বিজোড় সংখ্যার সেটকে এইপ্রকার প্রতীক আকারে এভাবে প্রকাশ করা যায়:

{x | x বিজোড় সংখ্যা এবং x 10-এর চেয়ে বড় এবং 30-এর চেয়ে ছোট (অর্থাৎ $10 < x < 30$)}

বা {x : x বিজোড় সংখ্যা এবং $10 < x < 30$}

[এখানে | বা : এই চিহ্নগুলি 'যাহারা' বা 'যেমন' বা 'such that' অর্থে ব্যবহৃত হয়।]

যদি কোন সেট A-এর সব পদগুলি একটি ধর্ম (ধর $P(x)$* মেনে চলে তাহলে প্রতীক আকারে Aকে এভাবে লেখা যায়

$$A = \{x : P(x)\}$$

বা, $$A = \{x \mid P(x)\}$$

উদাহরণ

1. ধরা যাক M ভারতের সব শহরগুলির সেট যাদের জনসংখ্যা 1972 খৃষ্টাব্দে 50 লক্ষেরও বেশী। এখানে $p(x)$ দ্বারা এই সর্তটি বোঝায় যে x শহরের জনসংখ্যা 1972 খৃষ্টাব্দে 50 লক্ষেরও বেশী। সুতরাং আমরা লিখতে পারি

M = { x : x শহরের জনসংখ্যা 1972-এ 50 লক্ষেরও বেশী }

বা $M = \{x : p(x)\}$

*যদি P একটি সর্ত বা ধর্ম হয় যেটি সেটের সব পদগুলি মেনে চলে তাহলে $P(x)$ দ্বারা সর্ত বা ধর্মটিকে প্রকাশ করা হয় অর্থাৎ $P(x)$ এর অর্থ হল 'x' পদ P সর্তটি পূরণ করে।"

2. যদি B দ্বারা একটি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট বোঝানো হয় এবং B-এর পদ x যদি $x-3=0$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে তাহলে Bকে এভাবে প্রকাশ করা যায়ঃ

$B=\{x : x \in N$ এবং $x-3=0\}$ [এখানে N দ্বারা স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে সূচিত করা হয়েছে।]

বা, $B=\{3\}$

নীচে কয়েকটি সেটকে তালিকা আকার ও প্রতীক আকারে প্রকাশ করা হল :

1. $2x-8=0$ সমীকরণটির বীজের সেট,

	তালিকা আকার	প্রতীক আকার
	$\{4\}$	$\{x : 2x-8=0\}$
2. সব বিজোড় সংখ্যার সেট,	$\{1, 3, 5, 7, \cdots\cdots\}$	$\{x : x=2n+1, n \in N,$ N সব স্বাভাবিক সংখ্যার সেট$\}$

3. ধনাত্মক ভগ্নাংশগুলির সেট যাদের হর ও লবের যোগফল 5

$\{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$ $\quad \left\{x : x=\frac{p}{q}, p > 0, q > 0 \text{ এবং } p+q=5\right\}$

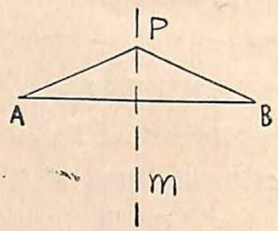
জ্যামিতিক বহু তথ্য ও ধর্ম সেট-এর ভাষায় সহজে প্রকাশ করা যায়। এখন এই ধরনের কয়েকটি সেট-এর আলোচনা করা যাক।

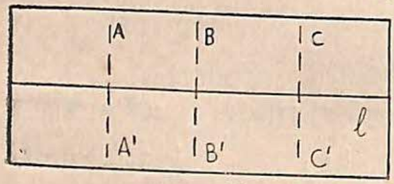
(a) একটি সরলরেখার l-এর উপর অবস্থিত সব বিন্দুগুলি একটি সেট গঠন করে। এই সেটকে বিন্দু সেট (point set) বলা যেতে পারে এবং প্রতীক আকারে লেখা যায় $\{x : x$ একটি বিন্দু এবং x বিন্দু l রেখার উপর অবস্থিত।$\}$

(b) একই সমতলে অবস্থিত বিন্দুগুলি যাদের দূরত্ব একটি নির্দিষ্ট বিন্দু A থেকে 5 cm. তারা একটি বিন্দু সেট গঠন করে। এই বিন্দু সেটটিকে জ্যামিতিতে বৃত্ত (circle) বলে এবং নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বৃত্তের **কেন্দ্র** (centre) বলে। প্রতীক আকারে লেখা যায় $\{x : x$ সেই সব বিন্দু যারা 5 cm. ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত এবং যার কেন্দ্র A$\}$.

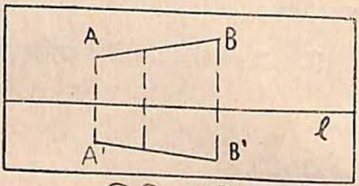
(c) ধর $\overline{AB}$ একটি রেখাংশ। A এবং B বিন্দু থেকে সমান দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুসমূহ একটি বিন্দু সেট গঠন করে। এই বিন্দুগুলি একটি রেখার

উপর অবস্থিত থাকে। এই রেখাকে $\overline{AB}$ রেখাংশের **সমদ্বিখণ্ডক** বলা হয়। যদি সমদ্বিখণ্ডক রেখাটিকে m দ্বারা সূচিত করা হয় তাহলে $\overline{AB}$ রেখাংশের সমদ্বিখণ্ডককে সেট-এর ভাষায় এভাবে প্রকাশ করা যায়ঃ {P : P $\overline{AB}$ রেখাংশের তলে অবস্থিত সেইসব বিন্দু যাহারা $\overline{PA}=\overline{PB}$ এই সর্তটি পূরণ করে}





প্রথম চিত্র



দ্বিতীয় চিত্র

উপরের চিত্রে A, B, C তিনটি বিন্দুর প্রতিবিম্ব (প্রতিফলন রেখা l সাপেক্ষ) A′, B′, C′ দেখানো হয়েছে। এই চিত্রে A′, B′, C′ বিন্দুগুলিকে সেট-এর আকারে এভাবে প্রকাশ করা যায় {A′, B′, C′ : $l(A)=A'$, $l(B)=B'$, $l(C)=C'$} (প্রথম চিত্র)। এখানে $l(P)=P'$-এর অর্থ হল l প্রতিফলন রেখা সাপেক্ষে P বিন্দুর প্রতিবিম্ব P′ বিন্দু।

এই ধারণা থেকে বলা যায় যে $\overline{A'B'}$ রেখাংশের উপর অবস্থিত বিন্দুগুলি $\overline{AB}$ রেখাংশের উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের (l সাপেক্ষে) প্রতিবিম্ব (দ্বিতীয় চিত্র)। অর্থাৎ $\overline{A'B'}$ রেখাংশের উপর অবস্থিত বিন্দুগুলির সেট l সাপেক্ষে $\overline{AB}$ রেখাংশের উপর অবস্থিত বিন্দু সেটের প্রতিবিম্ব।

∴ $\overline{A'B'}$ রেখাংশটিকে প্রতীক আকারে এভাবে প্রকাশ করা যায় :

$$\{x' : l(x)=x' \text{ এবং } x \in \overline{AB}\}$$

(a), (b), (c), (d)তে যেসব সেটের কথা বলা হয়েছে তারা সকলেই বিন্দু দ্বারা গঠিত। এখন আমরা কয়েকটি সেটের কথা বলব যাদের পদগুলি হবে সরলরেখা।

(e) ধরা যাক যে-কোন তিনটি সরলরেখার (যাদের **যে-কোন** দুটি রেখা পরস্পরকে ছেদ করে) দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক চিত্রসমূহকে নিয়ে একটি

সেট গঠন করা হল। এই সেটটিকে ত্রিভুজসমূহের সেট (ধর T) বলা যায়। যে কোন ত্রিভুজ T সেটের একটি পদ। লক্ষ্য কর যে, T সেটটি অসীম। অনুরূপভাবে সামতলিক চতুর্ভুজ ও পঞ্চভুজের সেট গঠন করা যায়।

প্রশ্নমালা 1A

1. নীচের সঙ্কলনগুলির কোন্‌টি সেট তা নির্ণয় কর :

(i) পৃথিবীর সকল খর্বকায় ব্যক্তি ; (ii) পাঠাগারের সকল পুস্তক ; (iii) 1, 2, 3 দ্বারা যতগুলি তিন অঙ্ক-বিশিষ্ট স্বতন্ত্র সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সেট ; (iv) বিদ্যালয়ের সব শিক্ষক-শিক্ষিকাদের সেট ; (v) 0 এবং 99-এর মধ্যে অবস্থিত সকল অখণ্ড সংখ্যাসমূহের সেট যারা 6 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য ; (vi) ভারতবর্ষের প্রচলিত মুদ্রাসমূহের সেট ;

2. ধর $N=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots\}$ = সব স্বাভাবিক সংখ্যার সেট,
$P=\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots\}$ = স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির বর্গের সেট,
$E=\{5, 10, 15, \cdots\cdots\cdots\}$ = স্বাভাবিক সংখ্যার সেট যাহারা 5 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য।

নীচের সংখ্যাগুলি কোন সেটের পদ কিনা এবং হলে কোন্ সেটের পদ বল :

$101, 11, \cdot 91, \frac{3}{4}, -2\cdot 1, \sqrt{2}, \frac{25}{9}, 529, 106, -21, 5505.$

3. মনে কর, D = পশ্চিমবঙ্গের জেলাসমূহের সেট, S = পশ্চিমবঙ্গের বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের সেট। কলিকাতা, বিশ্বভারতী, বর্ধমান, যাদবপুর, বীরভূম, কালনা, ধানবাদ এগুলি কোন্ সেটের পদ এবং কোন্ সেটের পদ নয় তা প্রতীক চিহ্ন দ্বারা দেখাও।

4. ধর A = সকল সামতলিক ত্রিভুজের সেট, তাহলে নীচের জ্যামিতিক চিত্রগুলি A সেটের পদ হবে কি না তা প্রতীক চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ কর।

(*a*) সমকোণী ত্রিভুজ DEF, (*b*) চতুর্ভুজ PQRS, (*c*) বর্গক্ষেত্র LMNR, (*d*) বৃত্ত S.

5. নীচের সেটগুলিকে তালিকা বা বন্ধনীর সাহায্যে প্রকাশ কর :

(*a*) তোমাদের স্কুলের সব শিক্ষকদের সেট ; (*b*) 'TRANSFORMATION' শব্দটির অক্ষরগুলির সেট, (*c*) সব ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট ;

(*d*) 123824 সংখ্যাটির অঙ্কগুলির (digit) সেট, (*e*) 790-এর সব মৌলিক উৎপাদকগুলির সেট।

6. নীচের সেটগুলিকে প্রতীক আকারে প্রকাশ কর :

(i) $\{a, n, d\}$, (ii) $\{t, a, k, e\}$, (iii) $2x+3=9$ সমীকরণটির বীজের সেট, (iv) $x^2=9$ সমীকরণটির বীজসমূহের সেট, (v) 1 এবং 10-এর মধ্যে অবস্থিত সকল বর্গ অখণ্ড সংখ্যার সেট।

7. (*a*) পৃথিবীর সকল মানুষের সেট; (*b*) পৃথিবীর সকল অণুর (atoms) সেট; (*c*) 13 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য সকল অখণ্ড সংখ্যার সেট; (*d*) ইংরেজী শব্দসমূহের সেট; (*e*) 1 এবং 99-এর মধ্যে অবস্থিত সকল সংখ্যাদের সেট যাদের অঙ্ক (digit) দুটির যোগফল 9. এই সেটগুলির মধ্যে কোন্‌টি অসীম ও কোন্‌টি সসীম তাহা নির্ণয় কর।

8. নীচের সেটগুলি ভাষায় প্রকাশ কর :

(i) $K=\{5, 10, 15, 20, 25\}$, (ii) $M=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, (iii) $R=\{a, b, c, d, e\}$ (iv) $S=\{`+', `-', `\times', `\div'\}$.

9. নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর লিখ :

(*a*) তিমি মাছ কি সকল মাছের সেট-এর পদ ?

(*b*) মাংস কি প্রোটিন যুক্ত সকল খাদ্য-সামগ্রীর যে সেট তার পদ ?

(*c*) 64 কি সকল অখণ্ড পূর্ণ বর্গ সংখ্যার যে সেট তার পদ ?

10. চারটি বিন্দু A, B, C, D একই তলে অবস্থিত এবং এদের যে কোন তিনটি বিন্দু এক রেখীয় (collinear) নয়। এই চারটি বিন্দু দিয়ে যতগুলি সরলরেখা টানা যায় তারা একটি সেট গঠন করে। এই সেটকে তালিকা আকারে প্রকাশ কর এবং সেটটির পদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

11. l, m, n, p চারটি রেখা একই সমতলে আছে এবং যে-কোন তিনটি রেখা একবিন্দুগামী নয়। এই চারটি রেখার ছেদবিন্দুগুলি একটি সেট গঠন করে। এই সেটে কতগুলি পদ আছে তা চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

12. একই ভূমির উপর অবস্থিত সামান্তরিকগুলির সেটকে যদি S দ্বারা সূচিত করা হয়, তাহলে দেখাও যে S-এর মধ্যে অসংখ্য সামান্তরিক আছে যাদের ক্ষেত্রফল সমান।

13. নিম্নের সেটগুলি ভাষায় প্রকাশ কর এবং প্রতিটি সেটে আর একটি করে পদ লেখ :

(a) { পূর্ব, পশ্চিম,…… }. (b) { শরৎ, বর্ষা,…… }

(c) { 2, 4, 8,…… } (d) { 5, 2, −1,…… }

(e) { ˙1, ˙001, ˙00001,…… } (f) { $a-b$, a, $a+b$,…… }

1.4. শূন্য সেট (Empty set), একপদী সেট (Unit set or singleton) :

ধর S তোমাদের স্কুলের সব ছাত্রদের সেট। S সেটে যদি আর একটি সর্ত আরোপ করা যায় তাহলে যে সকল ছাত্র এই সর্তটি পূরণ করে তারা আর একটি সেট গঠন করবে। ধর সর্তটি 'স্কুলের ছাত্রের বয়স 50 বছরের বেশী' তাহলে দেখবে এই সর্ত S সেটের কোন পদই পূরণ করছে না ; যেহেতু 50-এর উর্ধ্বে বয়স এমন কোন ছাত্র তোমাদের স্কুলে নেই অর্থাৎ পূর্বোক্ত সর্ত মেনে চলে যে সেট সে সেটে S সেটটির কোন পদ থাকবে না। এই বিশেষ ধরনের সেটকে **শূন্য সেট** (Empty set or Null set or Void set) বলা হয়। এক কথায় যে সেটে কোন পদ থাকে না সেই সেটকে শূন্য সেট বলে। শূন্য সেটকে ϕ (ফাই) চিহ্ন দ্বারা বা { } দ্বারা সূচিত করা হয়।

এখন কয়েকটি শূন্য সেটের উদাহরণ দেওয়া যাক :

1. সব স্বাভাবিক সংখ্যাদের সেট যাদের সহিত 1 যোগ করলে শূন্য সংখ্যা (0) হয় অর্থাৎ $\{x : x+1=0$, x স্বাভাবিক সংখ্যা $\}$। এ রকম কোন স্বাভাবিক সংখ্যা নেই, অতএব সেটটি শূন্য সেট।

2. 24 এবং 28-এর মধ্যে যতগুলি মৌলিক সংখ্যা আছে তাদের সেট। 24 এবং 28-এর মধ্যে কোন মৌলিক সংখ্যা নেই সুতরাং এই সেটটি শূন্য সেট।

3. 2 এবং 3-এর মধ্যে অবস্থিত সব পূর্ণসংখ্যার সেটটিও শূন্য সেট।

4. 1947 থেকে 1974 পর্যন্ত পশ্চিমবঙ্গের নারী মুখ্যমন্ত্রীদের সেটও শূন্য সেট।

5. সকল ত্রিভুজের সেট যাদের যে-কোন দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ছোট। তোমরা জান যে-কোন ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বড়, সুতরাং এই সেটটি শূন্য সেট।

6. সকল বিজোড় সংখ্যার সেট যারা 2 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। কোন বিজোড় সংখ্যাই 2 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য নয়, সুতরাং এই সেটটি শূন্য সেট।

শূন্য সেটের প্রকৃত সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব নয়। শূন্য সেট অনেকাংশে শূন্য সংখ্যার সঙ্গে তুলনীয়। লক্ষ্য কর যে 0 সংখ্যাটি সেট নয় কিন্তু $\{0\}$ একটি সেট। $\{0\}$ সেটটির একটি মাত্র পদ আছে তা হল শূন্য বা 0। আরও লক্ষ্য কর ϕ বা $\{\ \}$ এবং $\{0\}$ এই দুটি সেট ভিন্ন।

একপদী সেট (Unit set or singleton) : ধর $A=\{x : x+4=6, x > 0\}$. A সেটে একটি মাত্র পদ আছে এবং এই পদটি হল 2 অর্থাৎ $A=\{2\}$. যেসব সেটে একটি মাত্র পদ থাকে সেই সব সেটকে একপদী সেট (Unit set) বলে। এখানে কয়েকটি একপদী সেটের উদাহরণ হল :

1. ইংরেজী মাসের সেট যার প্রথম অক্ষর F ; 2. দুটি প্রদত্ত বিন্দু দিয়ে যায় এমন সব সরল রেখার সেট ; 3. একটি ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদ বিন্দুর সেট।

1.5. উপসেট (Subset), সমসেট (Equal sets)

(1) ধর $A=\{a, e, i, o, u\}$, $B=\{e, u\}$. B সেটের প্রতিটি পদ A সেটেরও পদ এবং A সেটে এমন সব পদ আছে (যেমন a, i, o) যারা B সেটের পদ নয়। B সেটটি A সেটের পদগুলি থেকে কিছু পদ নিয়ে গঠিত হয়েছে। এক্ষেত্রে A ও B সেট দুইটির মধ্যে একটি সম্পর্ক আছে। সম্পর্কটি হল : B সেটের প্রতিটি পদ A সেটেরও পদ। এখানে Bকে A-এর **উপসেট** বলা হয়।

যদি A এবং B দুইটি সেট এমন হয় যে B-এর প্রতিটি পদ A'রও পদ তাহলে Bকে A সেটের **উপসেট** (Subset) বলা হয় বা B সেট Aতে অন্তর্ভুক্ত বলা হয়। B সেট A সেটের উপসেট হলে $B \subseteq A$ বা $A \supseteq B$ লেখা হয়।

[$B \subsetneq A$কে এভাবে ব্যক্ত করা হয় : (1) B সেট A সেটের উপসেট
বা (2) A সেট B সেটকে ধারণ করে,
বা (3) B সেট A সেটে অন্তর্ভুক্ত।]

যদি B সেট A সেটের উপসেট হয় তাহলে Aকে B-এর সুপার সেট (Super set) বলা হয়।

প্রকৃত বা যথার্থ উপসেট (Proper subset) : Bকে Aএর **যথার্থ উপসেট** বলা হয় যদি B এর প্রতিটি পদ Aতে থাকে এবং Aতে অন্ততঃ-পক্ষে একটি পদ থাকবে যা Bতে নেই। 'B সেট A সেটের প্রকৃত উপসেট' এই উক্তিটি এভাবে প্রকাশ করা হয় $B \subset A$.

উদাহরণ

(1) $\{2, 3, 4\}$ সেটটি $\{4, 2, 3\}$ সেটের উপসেট কিন্তু প্রকৃত উপসেট নয়। কিন্তু $\{2, 3\}$ সেটটি $\{2, 3, 4\}$ সেটটির প্রকৃত উপসেট বা $\{2, 3\} \subset \{2, 3, 4\}$.

(2) $P=\{1, 2, 31, 5, 19\}$, $Q=\{2, 31, 5\}$. এখানে $2 \in P$, $3 \in P$, $5 \in P$, অতএব Q সেটের প্রতিটি পদ P সেটেরও পদ। আবার P সেটে এমন পদ আছে (যেমন 19, 1) যারা Qতে নেই। সুতরাং Q সেট P সেটের প্রকৃত উপসেট বা $Q \subset P$.

(3) ধর $A=\{a, b, c\}$. A সেট থেকে অনেকগুলি উপসেট গঠন করা যায় ; যেমন $\{a\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{b\}$ প্রভৃতি এই সেটগুলি প্রত্যেকেই A সেটের প্রকৃত উপসেট অর্থাৎ $\{a\} \subset \{a, b, c\}$, $\{b\} \subset \{a, b, c\}$, $\{c\} \subset \{a, b, c\}$.

$$\{b, c\} \subset \{a, b, c\}.$$

লক্ষ্য কর যে, $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$.

4. ধর $N=\{1, 2, 3, 4, 5 \cdots\cdots\}$, $J=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots\}$

$$E=\{2, 4, 6, 8 \cdots\cdots\cdots\}, O=\{1, 3, 5, 7 \cdots\cdots\}$$

$$J=\{0, 1, 2, 3 \cdots\cdots\cdots\}, J^-=\{-1, -2, -3, -4, \cdots\}$$

লক্ষ্য কর N-এর প্রতিটি পদ Jতে এবং J-এ আছে। আবার $O \in J$ কিন্তু $O \notin N$, অতএব $N \subset J$, $N \subset J$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় $E \subset N$, $O \subset N$

$$J \subset J, J^- \subset J, O \subset J, E \subset J.$$

5. মনে কর N = স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $=\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots]$

J = সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট $=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$

Q = সকল মূলদ রাশির সেট $=\{\frac{p}{q} : p \in J, q \in N$ এবং p, q-এর গ. সা. গু $=1\}$

R = সকল বাস্তব রাশির (real numbers) সেট।

[এই পুস্তকে পরবর্তী আলোচনায় N, J, Q, R দ্বারা পূর্বে উল্লিখিত সেটগুলিকে বোঝানো হবে।]

তোমরা সহজেই বলতে পার যে $N \subset J$, $N \subset Q$, $N \subset R$;

$J \subset Q$, $J \subset R$;

$Q \subset R$

এখানে লক্ষ্য কর যে, অসীম সেটের উপসেটগুলিও আর একটি অসীম সেট।

6. ধর T=একই তলে অবস্থিত সকল ত্রিভুজের সেট, R=একই তলে অবস্থিত সব সমকোণী ত্রিভুজের সেট, I=সকল সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সেট, E=সকল সমবাহু ত্রিভুজের সেট, A=একই ক্ষেত্রফল যুক্ত ত্রিভুজের সেট।

এখানে দেখা যাচ্ছে যে $R \subset T$, $I \subset T$, $E \subset T$, $A \subset T$

$E \subset I$

7. ধর $X=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $Y=\{1, 3, 5, 7 \cdots\}$. X সেটের কোন পদ Y সেটের পদ নয় এবং Y সেটের কোন পদ নয় অর্থাৎ $X \not\subset Y$ এবং $Y \not\subset X$ ($\not\subset$-এর অর্থ উপসেট নয়)।

[উপরের উদাহরণগুলি থেকে বলা যায় যে দুটি সেট A ও B একে অপরের উপসেট হতে পারে বা নাও হতে পারে।]

সমসেট (Equal sets): ধর $A=\{2, -2\}$, $B=\{x : x^2=4\}$. B সেটের পদগুলি $x^2=4$ সমীকরণটির বীজ, অতএব $B=\{2, -2\}$. এখানে A সেটের প্রতিটি পদ Bতে আছে এবং B সেটের প্রতিটি পদ Aতে আছে। অর্থাৎ $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$। এক্ষেত্রে A ও B সেট দুটিকে সমান (equal) বলা হয় এবং $A=B$ লিখে তা প্রকাশ করা হয়।

দুটি সেট A এবং Bকে **সমান** বলা হয় যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$.

উদাহরণ

(1) ধর $A=\{x : (x-1)(x-2) < 0, x$ মূলদ রাশি $\}$

$B=\{x : 1 < x < 2, x$ মূলদ রাশি $\}$

মনে কর $x \in A$, অতএব x একটি মূলদ রাশি এবং $(x-1)(x-2) < 0$. এখন $(x-1)(x-2) < 0$ হবে যদি $(x-1)$ এবং $(x-2)$ রাশি দুটির একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক মূলদ রাশি হয়।

যদি $(x-2) > 0$ তাহলে $(x-1) < 0$ হতে পারে না, সুতরাং $(x-1) > 0$ এবং $(x-2) < 0$ হবে। অর্থাৎ $x > 1$ হবে এবং $x < 2$ হবে। এই দুটি সম্পর্ক থেকে পাই $1 < x < 2$. অতএব A সেটের

প্রতিটি পদ B সেটেরও পদ এবং B সেটের প্রতিটি পদ A সেটেরও পদ অর্থাৎ $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$. সুতরাং A ও B সেট দুটি সমান।

$\therefore \quad A = B.$

(2) $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$; $B = \{5, 15, 25, 10, 20\}$

এখানে $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$, সুতরাং $A = B$

(3) $R = \{a, h, m, t\}$, $T = \{m, a, h, t\}$

$R \supseteq T$ এবং $T \supseteq R$ সুতরাং $R = T$

(4) $P = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ এবং Q = 1 এবং 10-এর মধ্যে অবস্থিত বিজোড় সংখ্যা (1 এবং 10 বাদ দিয়ে)। $\therefore \; Q = \{3, 5, 7, 9\}$

এখানে $Q \subset P$ যেহেতু P সেটটির একটি পদ (1) Q সেটে নেই।

$\therefore \; P \neq Q$. [অর্থাৎ P সেট Q সেট এর সমান নয় ; সমান নয় এই অর্থে $\neq$ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়)

1.6. সার্বিক সেট (Universal set) :

সেট সম্পর্কিত আলোচনায় দেখা যায় যে আলোচ্য সেটগুলি একটি বিশেষ সেটের উপসেট। এই বিশেষ সেটকে আলোচ্য সেট সাপেক্ষে **সার্বিক সেট** বলা হয়। যখন স্বাভাবিক সংখ্যাদের দ্বারা সেটগুলি নিয়ে আলোচনা করা হয় তখন সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে (N) সার্বিক সেট ধরা হয়। আবার যখন কোন স্কুলের ছাত্রদের নিয়ে গঠিত সেট সম্বন্ধে আলোচনা হয় তখন সকল ছাত্রদের সেটকে সার্বিক সেট বলা চলে। এইভাবে যখন আলোচনা সামতলিক জ্যামিতিক চিত্র সমূহের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে তখন সমতলের উপর অবস্থিত সকল বিন্দুগুলির সেটকে সার্বিক সেট ধরা হয়।

সার্বিক সেট সম্বন্ধে পরিষ্কার ধারণার জন্য কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া যাক।

1. ধর A = ভারতবর্ষের সকল স্কুলের ছাত্রদের সেট,

B = পশ্চিমবঙ্গের প্রাথমিক স্কুলের ছাত্রদের সেট,

C = পাঞ্জাবের সব স্কুলের ছাত্রদের সেট,

D = ডেনমার্কের সব স্কুলের ছাত্রদের সেট।

A, B, C, D সেটগুলি নিয়ে আলোচনা করলে পৃথিবীর সব স্কুলের ছাত্রদের সেটকে A, B, C, D সাপেক্ষে সার্বিক সেট বলা যায়। সারা পৃথিবীর

স্কুলের ছাত্রদের সেট এমন একটি সেট যাতে A, B, C, D সেটের পদগুলি এই সেটটির পদ অর্থাৎ A, B, C, D সেটগুলি এই বিশেষ সেটের উপসেট। সুতরাং 'সারা পৃথিবীর স্কুলের ছাত্রদের সেটটি' এই আলোচনায় A, B, C, D সাপেক্ষে সার্বিক সেট বলা যায়।

2. মনে কর Q^+ = সব ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট,

J = সকল অখণ্ড সংখ্যার সেট,

E = 1282 এই সংখ্যাটির সকল মৌলিক উৎপাদকের সেট,

G = সকল মৌলিক সংখ্যার সেট,

H = সব পূর্ণ সংখ্যার সেট যারা 9 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য।

এখানে আলোচ্য সেটগুলি সংখ্যা দ্বারা গঠিত। সুতরাং Q^+, E, G, H সেটগুলি সাপেক্ষে Jকে সার্বিক সেট ধরা যায় কেন না এই সব সেটগুলি প্রত্যেকেই J সেটের উপসেট।

সার্বিক সেটকে সাধারণত U বা X দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। যদি A সেটের সাপেক্ষে সার্বিক সেট U হয় তাহলে $A \subset U$ চিহ্ন দ্বারা তা প্রকাশ করা হয়।

1.7. সূচক সেট (Power set) :

ধর A = {{1}, {2, 3}, {7, 1, 6}} একটি সেট। লক্ষ্য কর A সেটটির প্রতিটি পদ এক একটি সেট। যেমন {1} একটি সেট, {2, 3} একটি সেট, {7, 1, 6} একটি সেট। A সেটকে **সেটসমূহের সেট** (Set of sets) বলা যায়। আবার যদি ভারতবর্ষের সকল পরিবারসমূহের সেটকে একটি সেট হিসেবে গণ্য করা হয় তাহলে এই সেটটির প্রতিটি পদ একটি সেট। সুতরাং ভারতবর্ষের পরিবারসমূহের সেটের যে সেট তা হল সেটসমূহের সেট। এই ভাবে পশ্চিমবঙ্গে নানা শ্রমিক সংস্থাগুলি নিয়ে যে সেট গঠন করা যায় তাকে সেটসমূহের সেট বলা যাবে কেন না যে-কোন শ্রমিক সংস্থা এই সেটের পদ এবং শ্রমিক সংস্থাগুলি শ্রমিকদের নিয়ে গঠিত এক একটি সেট।

যদি A একটি সেট হয় তাহলে A সেটের প্রতিটি উপসেটকে (ϕ এবং A সমেত) পদরূপে গণ্য করে যে সেট গঠন করা যায় তাকে A সেটের **সূচক সেট** (Power set) বলা হয়। A সেটের সূচক সেটকে P(A) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

লক্ষ্য কর যে **P(A)** এমন একটি সেট যার প্রতিটি পদ আর একটি সেট। সুতরাং P(A)কে সেটসমূহের সেট বলা যায়। P(A) সেটকে প্রতীক আকারে এভাবে ব্যক্ত করা যায়: P(A)={x : x হবে A সেটের যে-কোন একটি উপসেট।}

উদাহরণ

(1) ধর A={0, 1}. A সেট থেকে চারটি উপসেট গঠন করা যায় যেমন ϕ[={ }], {1}, {0}, {0, 1}. এই উপসেটগুলিকে পদরূপে যে সেটটি পাওয়া যাবে সেই সেটটি A সেটের সূচক সেট বা P(A).

$$\therefore\quad P(A)=\left\{\phi, \{1\}, \{0\}, \{0, 1\}\right\}$$

(2) যদি A={a, b, c} হয় তাহলে একটি করে পদ নিয়ে {a}, {b}, {c} এই তিনটি উপসেট গঠন করা যায়। আবার দুটি করে পদ নিয়ে {a, b}, {b, c}, {c, a} এই তিনটি উপসেট গঠিত হয় এবং তিনটি পদকে নিয়ে যে সেটটি পাই সেটি A সেটের উপসেট (অর্থাৎ $A \subseteq A$). এছাড়া ϕ বা শূন্য সেটকে যদি A সেটের উপসেট ধরা হয় (প্রকৃতপক্ষে 'ϕ সেট যে-কোন সেটের উপসেট' এই তথ্যটি পরবর্তী আলোচনায় প্রমাণ করা হবে।) তাহলে A সেট থেকে মোট ৪টি উপসেট গঠন করা সম্ভব। এই ৪টি সেটকে পদরূপে গণ্য করে A সেটের সূচক সেটটি পাওয়া যাবে।

$$\therefore\quad P(A)=\left\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\right\}$$

(3) ধর A={ইস্কাবনের টেক্কা, রুহিতনের টেক্কা, চিড়িতনের টেক্কা, হরতনের টেক্কা}। যদি ইস্কাবনের টেক্কাকে s দ্বারা, রুহিতনের টেক্কাকে d দ্বারা, চিড়িতনের টেক্কাকে c দ্বারা এবং হরতনের টেক্কাকে h দ্বারা সূচিত করা হয় তাহলে A={s, d, c, h} লেখা যায়। A সেট থেকে যতগুলি উপসেট গঠন করা যায় তাদের এভাবে লেখা যায়:

I { } বা ϕ

II {s}, {d}, {c}, {h}

III {s, d}, {s, c}, {s, h}, {d, c}, {d, h}, {c, h}

IV {s, d, c}, {s, d, h}, {s, c, h}, {d, c, h}

V {s, c, d, h}

সুতরাং A সেটের 16টি উপসেট আছে। এই 16টি উপসেটকে পদরূপে নিয়ে যে সেটটি তৈরি করা যাবে সেই সেটটি A সেটের সূচক সেট বা P(A)। A সেটে 4টি পদ আছে কিন্তু A সেটের উপসেট সংখ্যা হল $16 = 4 \times 4 = 4^2$। সুতরাং P(A) সেটের পদ সংখ্যা হল 4^2.

1.8. উপসেটের ধর্মাবলী ঃ

ধর্ম 1. শূন্য সেট ϕ যে-কোন সেট A-এর উপসেট অর্থাৎ $\phi \subseteq A$.

প্রমাণ ঃ মনে কর ϕ সেট A সেটের উপসেট নয় অর্থাৎ $\phi \not\subseteq A$.

$\therefore$ ϕতে অন্ততঃ একটি পদ আছে যা Aতে নেই।

কিন্তু ϕ সেটে কোন পদ নেই, অতএব যা ধরে নেওয়া হয়েছে (অর্থাৎ $\phi \subseteq A$) তা সত্য নয়।

সুতরাং $\phi \subseteq A$.

ধর্ম 2. (i) যে-কোন সেটের A-এর জন্য $A \subseteq A$.

(ii) যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq C$ তাহলে $A \subseteq C$

প্রমাণ ঃ (i) যেহেতু A'র প্রতিটি পদ Aতে আছে এবং এই তথ্যটি যে-কোন সেটের পক্ষ্যে সত্য সুতরাং উপসেটের সংজ্ঞানুসারে পাই $A \subseteq A$.

(ii) যেহেতু $A \subseteq B$ সুতরাং A'র প্রতিটি পদ Bতে আছে, আবার $B \subseteq C$ সুতরাং B'র প্রতিটি পদ Cতে আছে। অতএব A'র প্রতিটি পদ Cতে আছে। $\therefore A \subseteq C$.

[উপসেট সম্পর্কিত কয়েকটি ধর্ম পরে আলোচিত হবে।]

প্রশ্নমালা 1b

1. নিম্নের সেটগুলির কোনটি শূন্য সেট তা নির্ণয় কর ঃ

(*a*) 50 ফুট উচ্চতা-বিশিষ্ট সকল ভারতীয়দের সেট,

(*b*) সেই সব ভারতীয়দের সেট যাদের মাতৃভাষা ল্যাটিন,

(*c*) ভারতীয় মহাকাশচারীদের সেট,

(*d*) রসায়নে নোবল্ পুরস্কার প্রাপ্ত সকল ভারতীয় বিজ্ঞানীদের সেট,

(*e*) $\{x : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $4 < x < 6\}$

(*f*) সকল সামান্তরিকের সেট যাদের চারটি বাহুই সমান,

2. (i) $A=\{x : x$ হবে 'UNIT' শব্দটির যে কোন অক্ষর $\}$

$B=\{x : x$ হবে 'NITU' শব্দটির যে কোন অক্ষর $\}$

দেখাও যে $A=B$

(ii) $A\{3, 5\}$, $B=\{x : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $2 < x < 6\}$

দেখাও যে $A=B$

3. $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$. (i)A সেটের সব মৌলিক সংখ্যাদের নিয়ে একটি উপসেট গঠন কর, (ii) A সেটের যে সব সংখ্যা 3 দ্বারা বিভাজ্য তাদের নিয়ে একটি উপসেট গঠন কর, (iii) A থেকে দুটি করে সংখ্যা নিয়ে যতগুলি উপসেট গঠন করা যায় তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

4. $A=\{l, m, n, p\}$, B=সপ্তাহের সব দিনগুলির সেট। A সেট থেকে তিনটি উপসেট গঠন কর যাদের পদ সংখ্যা 2 এবং B সেট থেকে চারটি উপসেট গঠন কর যাদের পদ বংখ্যা 5.

5. Q=সব চতুর্ভুজের সেট T=সকল ট্রাপিজিয়মের সেট R=সকল সামান্তরিকের সেট। এই তিনটি সেটের মধ্যে Q সেট এবং R সেটের উপসেটগুলি নির্ণয় কর।

6. নীচের ছকটির শূন্য স্থান পূরণ কর :

সেট	পদ সংখ্যা	উপসেটের সংখ্যা
$\{a\}$	1	
$\{a, b\}$	2	
$\{a, b, c\}$		
$\{a, b, c, d\}$		
ϕ	0	

7. যদি কোন সেটের পদসংখ্যা 5 হয় তাহলে সেটটি থেকে যতগুলি উপসেট ভাবা যায় তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

8. বহুভুজ চিত্র সমূহের সেট থেকে তিনটি উপসেট তৈরী কর।

9. দেখাও যে সামান্তরিক সমূহের সেট সকল ট্রাপিজিয়মের উপসেট।

10. দেখাও যে (i) পূর্ণসংখ্যার সংখ্যার সেট সকল মূলদ রাশির সেটের উপসেট,

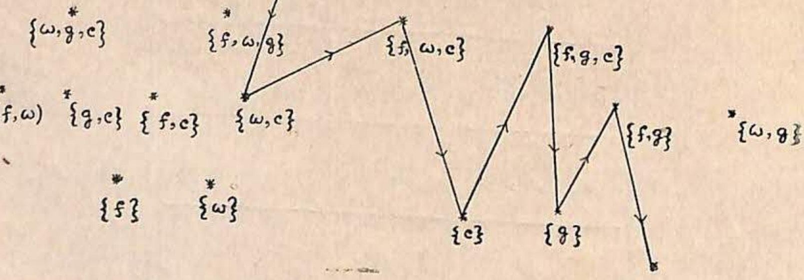
(ii) $\{x : 3 < x < 8$, x-মূলদরাশি$\} \subset \{x : 2 < x < 9$, x মূলদ-রাশি$\}$।

11. যদি A সেটের পদসংখ্যা n হয় তাহলে P(A) সেটের পদসংখ্যা কত ?

12. যদি A সেটের পদসংখ্যা $4m$ হয় তাহলে দেখাও যে P(A) সেটের পদসংখ্যা 16 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য।

13. এক মাঝিকে তার ছোট নৌকা দিয়া একটি নেকড়ে বাঘ, একটি ছাগল এবং একটি বাঁধা কপি নদীর এপার থেকে ওপারে নিয়ে যেতে বলা হল। ছোট নৌকা দিয়ে মাঝি নিজেকে ছাড়া আর একটি জিনিষ নিয়ে যেতে পারে। এদিকে নেকড়ে বাঘ ও ছাগলকে একসঙ্গে রাখা যাবে না, ছাগল ও বাঁধা কপি একসঙ্গে রাখা যাবে না। এমতবস্থায় মাঝি কিভাবে জিনিষগুলি নদীর ওপারে নিয়ে যাবে তার একটি পথ তুমি বের কর।

[**উত্তর :** এই প্রশ্নটি অনেকটা ধাঁধার মত, কিন্তু উপসেটের ধারণা নিয়ে এর সমাধান সহজেই করা যায়। মাঝিকে f, নেকড়ে বাঘকে ω, ছাগলকে g, বাঁধাকপিকে c দ্বারা সূচিত করা হল। ধর $A = \{f, \omega, g, c\}$. A সেটের 16টি উপসেট আছে। এই 16টি উপসেটকে বিন্দু (*) দ্বারা সূচিত করা হল।



এই 16টি উপসেট নদীর এপারের নানা সম্ভাব্য পরিস্থিতি নির্দেশ করছে। প্রশ্নানুসারে দেখা যায় যে, $\{\omega, g, c\}$, $\{\omega, f\}$, $\{g, c\}$, $\{\omega, f\}$, $\{f\}$, $\{\omega, g\}$ এই সম্ভাবনাগুলি সম্ভব নয়। সুতরাং বাকি সেটগুলির মধ্যে এমন ভাবে সংযোগ স্থাপন করতে হবে যাতে ϕ সেটটি পাই। চিত্রে এরকম একটি পন্থা বিন্দুগুলিকে যুক্ত করে দেখানো হয়েছে।]

1.9. সেট প্রক্রিয়া (Set Operations)

তোমরা গণিতে পড়েছ কি ভাবে দুটি সংখ্যার 'যোগ', 'বিয়োগ', 'গুণ' ও ও 'ভাগ' করতে হয়। '+', '−', '×', '÷' এই চিহ্নগুলির দ্বারা 'যোগ', 'বিয়োগ', 'গুণ' ও 'ভাগ' প্রক্রিয়াগুলিকে বোঝানো হয়। আরও জান যে দুটি মূলদ রাশির মধ্যে এই প্রক্রিয়াগুলি প্রয়োগ করলে আর একটি করে মূলদ রাশি পাওয়া যায় (শুধু ভাগের ক্ষেত্রে 0 দ্বারা ভাগ সম্ভব নয়)। যেমন $3+7=10$, $\frac{11}{2}-\frac{2}{3}=\frac{29}{6}$, $\frac{5}{6}\times\frac{6}{17}=\frac{5}{17}$, $5\div3=\frac{5}{3}$ ইত্যাদি।

সেটের ক্ষেত্রে এ ধরনের প্রক্রিয়া সম্ভব হয়। যদি U-কে আমাদের আলোচ্য সেটগুলির পরিপ্রেক্ষিতে সার্বিক সেট ধরা হয় তাহলে U সেটের যে কোন দুটি উপসেটের উপর প্রক্রিয়াগুলি প্রয়োগ করলে U সেটের আর একটি উপসেট পাওয়া যায়। সেটে এই ধরনের তিনটি মূল প্রক্রিয়া আছে। তারা হল :

I যোগ (Union or Join)

II ছেদ (Intersection or Meet)

III পূরণ (Complementation)

I যোগ : ধর A ও B সার্বিক সেট U-এর দুইটি উপসেট। A ও B সেটের সকল পদগুলি নিয়ে যে সেটটি গঠন করা যায় তাকে A ও B সেটের **যোগ** (Union) বলে। A ও Bতে নেই এমন কোন বস্তু A ও B-এর যোগ সেটে নেই।

ধর $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 4, 5, 7, 8\}$ তাহলে A ও B-এর যোগ সেট হবে $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. [2 সংখ্যাটি যোগ সেটে দুবার লেখা হয় নি কারণ যে কোন সেটের পদগুলি স্বতন্ত্র হয়].

সংজ্ঞা : যদি $A, B \subset U$ তাহলে A এবং B-এর সকল পদগুলি দ্বারা যে সেটটি গঠন করা যায় তাকে A এবং B এর যোগ (union) বলা হয়।

ছুটি সেট A ও B-এর যোগ A ∪ B দ্বারা প্রকাশ করা হয়। [A ∪ B (A যোগ B) বা A কাপ (cup) B এভাবে পড়া হয়] A ∪ B-কে প্রতীক আকারে এভাবে প্রকাশ করা হয়ঃ

$A \cup B = \{x : x \in A$ বা* $x \in B\}$

অথবা $A \cup B = \{x : x$, A ও B এর মধ্যে অন্ততঃ একটিতে থাকবে }

উদাহরণ 1. ধর A={ ঈশ্বরচন্দ্র বিদ্যাসাগর, বঙ্কিমচন্দ্র, রবীন্দ্রনাথ, বিভূতিভূষণ}

B = { রবীন্দ্রনাথ, কাজী নজরুল, অতুল প্রসাদ }

∴ A ∪ B={ ঈশ্বরচন্দ্র বিদ্যাসাগর, বঙ্কিমচন্দ্র, রবীন্দ্রনাথ বিভূতিভূষণ, কাজী নজরুল, অতুলপ্রসাদ }

উদাহরণ 2. A={পশ্চিমবঙ্গের সব নিরক্ষর ব্যক্তিদের সেট},

B={পশ্চিমবঙ্গের সব কৃষকদের সেট},

∴ A ∪ B={পশ্চিমবঙ্গের সেই সব ব্যক্তিদের সেট যারা নিরক্ষর অথবা কৃষক অথবা নিরক্ষর কৃষক}।

উদাহরণ 3. ধর A=0 এবং 25-এর অন্তবর্তী সকল বিজোড় সংখ্যার সেট,

B=0 এবং 25-এর অন্তবর্তী সকল সংখ্যার সেট যারা 7-এর গুণিতক।

এখানে $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$

$A=\{7, 14, 21\}$

∴ $A \cup B=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 15, 17, 19, 21, 23\}$

A সেটের পদসংখ্যা 12, B সেটের পদসংখ্যা 3 কিন্তু A ∪ B সেটের পদ সংখ্যা হল 12. সুতরাং A ∪ B সেটের পদ সংখ্যা A ও B সেটদ্বয়ের পদ সংখ্যার যোগফলের সমান নয়।

উদাহরণ 4. $E=\{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\}$.

$O=\{1, 3, 5, 7, \cdots\cdots\}$

∴ $E \cup O=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\cdots\cdots\}$=অখণ্ড সংখ্যাসমূহের সেট (V)

---

*$x \in A$ বা $x \in B$-এর অর্থ হল x A-তে থাকবে কিংবা x B-তে থাকবে কিংবা x, A ও B উভয় সেটেই থাকবে। এখানে 'বা' এই যোজকটি 'and/or' এই অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে।

উদাহরণ 5. ধর, $A = \{x : x$ অখণ্ড সংখ্যা এবং $0 < x < 15\}$
$B = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $9 < x < 23\}$
$C = \{x : 2x - 6 = 0\}$

এখানে $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
$B = \{11, 13, 17. 19\}$
$C = \{3\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} \cup \{11, 13, 17, 19\}$

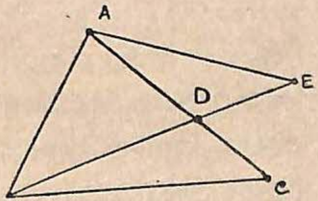
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 19\}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} \cup \{3\}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} = A$

$B \cup C = \{11, 13, 17, 19\} \cup \{3\}$
$= \{11, 13, 17, 19, 3\}$

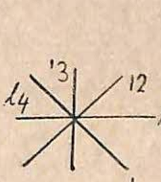
উদাহরণ 6. আগেই জেনেছ যে বহু জ্যামিতিক ধর্ম সেটের ভাষায় প্রকাশ করা যায়। এখানে জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে তা দেখান হয়েছে।



চিত্র নং -2

(i) চিত্র নং 2-তে বিন্দুকে A, B, C ইত্যাদি অক্ষর দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে। যদি $\overline{AB}$ রেখাংশকে A এবং B বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী বিন্দু সমূহের সেট হিসাবে ভাবা যায় এবং ABC ত্রিভুজের অন্তবর্তী এবং উপরের বিন্দুসমূহের সেটকে ABC ভাবা যায় তাহলে নীচের তথ্যগুলি সহজে লেখা যায়। যেমন

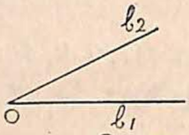
$\overline{AD} \cup \overline{DC} = \overline{AC}$, $\overline{BD} \cup \overline{DE} = \overline{BE}$,
$ABD \cup ADE = ABE$,
$AB \cup BDC = ABC$.


চিত্র নং-3

(ii) একটি বিন্দু দিয়ে অসীম সংখ্যক সরল রেখা টানা যায়। সেটের ভাষায় একে এভাবে ব্যক্ত করা যায়ঃ সমস্ত

সমবিন্দু সরলরেখা সমূহের সেট একটি অসীম সেট। এই সেটটিকে আবার অসংখ্য বিন্দু সেটের যোগ হিসাবে ভাবা যেতে পারে।

(iii) চিত্রে O বিন্দু থেকে নির্গত l_1 এবং l_2 রেখা দুটি একটি কোণ উৎপন্ন করেছে (চিত্র নং 4)। এই কোণকে সেটের সাহায্যে লেখা যায় $l_1 \cup l_2$.



চিত্র নং-4

II. **ছেদ** (Interseetion or Meet)

মনে কর $A, B \subset U$ অর্থাৎ A ও B সার্বিক সেট U-এর উপসেট। A ও B'র সকল সাধারণ (common) পদগুলি দ্বারা যে সেট গঠন করা যায় সেই সেটটিকে A ও B'র **ছেদ** (Intersection or Meet) বলে। A ও B'র ছেদকে $A \cap B$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যদি $x \in A \cap B$ তাহলে বলা যায় $x \in A$ এবং $x \in B$ অর্থাৎ $A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$.

ধর $A=\{a, i, m, t\}$, $B=\{i, m, p, a, l\}$

$\therefore$ $A \cap B=\{a, m, i\}$ [যেহেতু a, m, i পদগুলি A এবং B দুটি সেটই আছে।]

আবার যদি $A=\{3, 9, 12\}$, $B=\{1, 5, 11, 15\}$ তাহলে এমন কোন পদ খুঁজে পাওয়া যাচ্ছে না যা A এবং B উভয় সেটেই আছে। অতএব বলা যায় যে $A \cap Q=\phi$ (শূন্য সেট).

এইভাবে নিম্নলিখিত সংজ্ঞায় উপনীত হতে পারা যায়।

বিচ্ছিন্ন সেট (Disjoint Set) :

দুটি সেট A ও Bকে পরস্পর বিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি $A \cap B=\phi$ হয় অর্থাৎ যদি A ও B'র কোন সাধারণ পদ না থাকে।

যেমন $A=\{1, 3, 7\}$, $B=\{4, 8, 12\}$ সেট দুটি বিচ্ছিন্ন যেহেতু $A \cap B=\phi$.

উদাহরণ

(i) ধর A=খেলাধূলা করে এমন ছাত্রদের সেট,

B=গানবাজনা করে এমন ছাত্রদের সেট।

$\therefore$ $A \cap B$=যে সব ছাত্র খেলাধূলা ও গানবাজনা করে তাদের সেট।

(ii) যদি $A=\{a, b, c\}$, $B=\{c, e, f, d\}$ তাহলে $A \cap B=\{c\}$

(iii) ধর $S_1=A$ বিন্দুগামী সরলরেখা সমূহের সেট,

$S_2=B$ বিন্দুগামী সরলরেখা সমূহের সেট,

[এখানে একই তলে অবস্থিত রেখা সমূহের কথা বলা হয়েছে।]

তাহলে $S_1 \cap S_2$ এমন একটি সেট যার সকল পদ S_1 ও S_2 উভয় সেটেই আছে অর্থাৎ যে সব সরলরেখা A এবং B উভয় বিন্দু দিয়ে যায় তারা $S_1 \cap S_2$ সেটের পদ। তোমরা জান যে দুটি বিন্দু দিয়ে কেবল মাত্র একটি সরলরেখা যায় সুতরাং $S_1 \cap S_2$ সেটে একটি মাত্র পদ আছে এবং পদটি হল AB সরলরেখা।

$\therefore \quad S_1 \cap S_2=\{AB\}$ [AB দ্বারা A ও B বিন্দুগামী সরলরেখাকে সূচিত করা হয়েছে।]

লক্ষ্য কর $S_1 \cap S_2$ সেটটি একপদী।

(iv) যদি $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$ তাহলে $A \cap B=\{2, 3\}$

অনুসিদ্ধান্তঃ দুই বা ততোধিক সেটের যোগ ও ছেদ:

ধর $A, B, C \subset U$ তাহলে $A \cup B \cup C$ দ্বারা সেই সেটটিকে বোঝায় বা A, B ও C-এর সকল পদগুলি দ্বারা গঠিত। A, B ও C-এর যোগকে $A \cup B \cup C$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অনুরূপ ভাবে A, B ও C সেটগুলির ছেদ বলতে সেই সেটটিকে বোঝায় যা A, B ও C'র সকল সাধারণ পদগুলি দ্বারা গঠিত। A, B, C'র ছেদকে $A \cap B \cap C$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ 1. (i) $A=\{1, 3, 4, 8, 5\}$

$B=\{2, 3, 4, 6, 7\}$

$C=\{6, 4, 2, 3\}$

$\therefore \quad A \cup B \cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A \cap B \cap C=\{4, 3\}$

(ii) $A=\{x : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $1 \leqslant x < 10\}$

$B=\{x : x$ বিজোর সংখ্যা এবং $1 \leqslant x \leqslant 10\}$

$C=\{5, 7\}$

এখানে $A=\{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C=\{5, 7\}$

$\therefore \quad A \cup B \cup C=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

$A \cap B \cap C=\{5, 7\}$

উদাহরণ 2. ধর 5, 42, 105 সংখ্যা তিনটির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

(a) প্রথমে সংখ্যা তিনটির মৌলিক উৎপাদকগুলি বের করা হল এবং সংখ্যাগুলির মৌলিক উৎপাদকগুলি নিয়ে তিনটি সেট গঠন করা হল।

6'র মৌলিক উৎপাদক—1, 2, 3 ; মৌলিক উৎপাদকগুলির সেট

$\{1, 2, 3\}=A$

42'র মৌলিক উৎপাদক—1, 2, 3, 7 ; মৌলিক উৎপাদকগুলির সেট

$\{1, 3, 2, 7\}=B$

105'র মৌলিক উৎপাদক—1, 3, 7, 5 ; মৌলিক উৎপাদকগুলির সেট

$\{1, 3, 7, 5\}=C.$

(b) সংখ্যাগুলির ল. সা. গু.$=A \cup B \cup C$'র পদগুলির গুণফল,

সংখ্যাগুলির গ. সা. গু.$=A \cap B \cap C$'র পদগুলির গুণফল।

এক্ষেত্রে $A \cup B \cup C=\{1, 2, 3, 5, 7\}$;

$\therefore$ ল. সা. গু.$=1\times2\times3\times5\times7=210$

$A \cap B \cap C=\{1, 3\}$; $\therefore$ গ. সা. গু.$=1\times3=3.$

মন্তব্য : এই উদাহরণে 6, 42, 105 সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটির মৌলিক উৎপাদকগুলি স্বতন্ত্র অর্থাৎ কোন উৎপাদকের পুনরাবৃত্তি ঘটে নি। যদি মৌলিক উৎপাদকগুলি স্বতন্ত্র না হয় অর্থাৎ পুনরাবৃত্তি ঘটে তাহলে ল. সা. গু. এবং গ. সা. গু. কি ভাবে নির্ণয় করা হয় তা এখন আলোচনা করা হচ্ছে। ধর 12, 20, 140 সংখ্যা তিনটির ল. সা. গু. এবং গ. সা. গু. নির্ণয় করতে হবে।

$12=2\times2\times3=2_a\times2_b\times5$

[এখানে 2 উৎপাদকটি দুবার এসেছে এজন্য 2_a এবং 2_b ধরে তাদের স্বতন্ত্র ভাবা হল।]

অনুরূপভাবে $20=2_a \times 2_b \times 5$

$$140=2_a \times 2_b \times 5 \times 7$$

ধর $A=\{2_a, 2_b, 3\}$, $B=\{2_a, 2_b, 5\}$, $C=\{2_a, 2_b, 5, 7\}$

$\therefore \quad A \cup B \cup C=\{2_a, 2_b, 3, 5, 7\}$

$A \cap B \cap C=\{2_a, 2_b\}$

$\therefore$ ল. সা. গু. $=2_a \times 2_b \times 3 \times 5 \times 7=2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7=420$

$\therefore$ গ. সা. গু. $=2_a \times 2_b \qquad =2 \times 2 \qquad =4$

এভাবে বীজগাণিতিক রাশিমালার (algebraic expressions) ল. সা. গু. এবং গ. সা. গু. নির্ণয় করা সম্ভব হয়।

যেমন $xy(x^2-1)$, $xy(x+1)^2$, $xy^2(x+y)$ রাশি মালার উৎপাদক গুলির সেট হবে $A=\{x, y, x-1, x+1\}$, $B=\{x, y, (x+1)_a, (x+1)_b\}$

$$C=\{x, y_a, y_b, x+y\}$$

$\therefore \quad A \cup B \cup C=\{x, y_a, y_b, (x+1)_a, x-1, (x+1)_b, x+y\}$

$A \cap B \cap C=\{x, y)$

$\therefore$ ল. সা. গু. $=xy^2(x^2-1)(x+1)(x+y)$

গ. সা. গু. $=xy$.

পূর্বে তোমরা দুই বা ততোধিক সংখ্যা বা রাশিমালার ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. কি ভাবে নির্ণয় করতে হয় তা জেনেছো। এই উদাহরণে ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. সেটের যোগ ও ছেদের সাহায্যে কি ভাবে নির্ণীত হয় তা আলোচিত হল।

III. পূরণ (Complementation)

ধর, ইংরেজী সকল বর্ণের সেটকে সার্বিক সেট U ধরা হল এবং $A=\{a, e, i, o, u\}$ = সকল স্বরবর্ণের সেট। এক্ষেত্রে A সার্বিক সেট U-এর উপসেট। এখন আমরা আর একটি উপসেটের কথা ভাবতে পারি যার সকল পদ U-তে আছে কিন্তু A-তে নেই। এক্ষেত্রে সকল ব্যঞ্জনবর্ণের সেটটি এই ধরনের উপসেট যার সকল পদ Uতে আছে কিন্তু Aতে নাই। এই ব্যঞ্জনবর্ণের সেটটিকে U সাপেক্ষে স্বরবর্ণের সেট A'র পূরক (complement) বলা হয় এবং পূরক সেটটিকে C(A) বা A' বা $\bar{A}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

সংজ্ঞা : যদি A সার্বিক সেট U'-র উপসেট হয় তাহলে U সেটের যে সকল পদ A-তে নেই তারা U-এর আর একটি উপসেট নির্ণয় করে। এই উপসেটকে U সেট সাপেক্ষে A সেটের **পূরক** বলা হয় এবং A' বা $\overline{A}$ বা C(A) দ্বারা পূরক সেটকে চিহ্নিত করা হয়।

$\therefore \quad C(A) = A' = \overline{A} = \{x : x \in U$ এবং $x \notin A\}$

সুতরাং $x \in C(A)$ বলতে বোঝায় $x \in U$ কিন্তু $x \notin A$.

[পরবর্তী আলোচনায় A সেটের পূরককে A' দ্বারা চিহ্নিত করা হবে।]

লক্ষ্য কর (i) A এবং A' সেট দুটি U সাপেক্ষে একে অপরের পূরক

(ii) A ও A' সার্বিক সেট U-কে দুভাগে বিভক্ত করে এবং $A \cup A' = U$,

(iii) A ও A' সেটদ্বয়ে কোন সাধারণ পদ নেই অর্থাৎ $A \cap A' = \phi$

(iv) U সেটের পূরক ϕ অর্থাৎ $U' = \phi$

এবং ϕ সেটের পূরক U অর্থাৎ $\phi' = U$.

উদাহরণমালা

1. ধর সার্বিক সেট $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$A = \{2, 4, 6, 8\}$

$\therefore \quad A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

লক্ষ্য কর $A \cup A' = U$ এবং $A \cap A' = \phi$

2. ধর U = সকল পুরুষ ও মহিলাদের সেট,

M = সকল পুরুষদের সেট,

F = সকল মহিলাদের সেট।

$\therefore$ M' = সকল মহিলাদের সেট = F

F' = সকল পুরুষদের সেট = M.

এক্ষেত্রে $F \cup M = U$.

3. N = সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট,

E = সকল স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সেট,

O = সকল স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার সেট,

M = সকল স্বাভাবিক মৌলিক সংখ্যার সেট।

এক্ষেত্রে N-কে সার্বিক সেট ধরা যায়।

$\therefore$ $E' = C(E)$ = সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট যারা জোড় নয়
= সকল স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার সেট $= O$

$O' = C(O)$ = সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট যারা বিজোড় নয়
= সকল স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সেট $= E'$

$M' = C(M)$ = সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট যারা মৌলিক নয়

লক্ষ্য কর (i) $E \cup O = O' \cup E' = N$, (ii) $M \cup M' = N$

4. ধর T = তিনটি বাহুবিশিষ্ট সকল সামতলিক জ্যামিতিক চিত্র সমূহের সেট,

R = সকল সমকোণী ত্রিভুজের সেট,
B = সকল সমবাহু ত্রিভুজের সেট,
C = সকল সর্বসম ত্রিভুজের সেট।

এক্ষেত্রে T-কে সার্বিক সেট ধরা যায়। T সাপেক্ষে R, B, C সেটগুলির পূরক হবে R' = সকল ত্রিভুজের সেট যারা সমকোণী নয়
B' = সমবাহু নয় এরূপ ত্রিভুজের সেট
C' = সর্বসম নয় এরূপ ত্রিভুজ সমূহের সেট।

5. যদি $U = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$
$A = \{2, 16, 32\}$,
$B = \{1, 4, 8, 16\}$,

এখন দেখাও যে, (i) $(A')' = A$, (ii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
(iii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(i) $A' = \{x : x \in U$ এবং $x \notin A\} = \{1, 4, 8\}$
$(A')' = \{x : x \in U$ এবং $x \notin A'\} = \{2, 16, 32\} = A$

(ii) $A \cup B = \{1, 4, 2, 8, 16, 32\} = U$
$(A \cup B)' = \{x : x \in U$ কিন্তু $x \notin A \cup B\}$
$= \{\ \} = \phi$

$A' = \{1, 4, 8\}$, $B' = \{x : x \in U$ কিন্তু $x \notin B\} = \{2, 32\}$

$\therefore$ $A' \cap B' = \{1, 4, 8\} \cap \{2, 32\} = \phi$.

সুতরাং $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(iii) $A \cap B = \{16\}$, $(A \cap B)' = \{1, 2, 4, 8, 32\}$

$A' \cup B' = \{1, 4, 8\} \cup \{2, 32\} = \{1, 2, 4, 8, 32\}$

$\therefore \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

মন্তব্য : উপরোক্ত অনুচ্ছেদে মূল সেট প্রক্রিয়াগুলির আলোচনা করা হয়েছে। এখন আরও দুটি প্রক্রিয়া আলোচনা করা হবে।

ধর $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\ 12, 13\}$

$A = \{2, 3, 6, 9, 13\}$

$B = \{3, 4, 5, 9, 12, 13\}$

আমরা U সাপেক্ষে A ও B'-র পূরক সেট নির্ণয় করতে পারি। এক্ষেত্রে $A' = \{4, 5, 8, 12\}$, $B' = \{2, 6, 8\}$. এখন আমরা একটি বিশেষ প্রকার সেটের কথা বলব। সেটি হল A সাপেক্ষে B-এর পূরক সেট। এই সেটটির সকল পদগুলি A সেটের পদ হবে কিন্তু B সেটের পদ হবে না। A সাপেক্ষে B-এর পূরককে A ও B সেটের অন্তর (difference) বলা হয় এবং $A - B$ দ্বারা তা প্রকাশ করা হয়।

এক্ষেত্রে $A - B = \{2, 6\}$

অনুরূপভাবে B সাপেক্ষে A'-র পূরক বা B ও A'-র অন্তর হবে

$B - A = \{4, 5, 12\}$

মন্তব্য : লক্ষ্য কর যে যদি A-এর পরিবর্তে সার্বিক সেট ধরা হয় তাহলে

$A - B = U - B = B'$

এবং B-এর পরিবর্তে U ধরা হয় তাহলে $B - A = U - A = A'$

সংজ্ঞা : ধর $A, B \subset U$

তাহলে A ও B'-র অন্তর সেট এমন একটি সেট যারা সকল পদগুলির A'-র পদ কিন্তু B সেটের পদ নয় অর্থাৎ $A - B = \{c : x \in A$ কিন্তু $x \notin B)$.

অনুরূপভাবে $B - A = \{x : x \in B$ কিন্তু $x \notin A\}$.

(i) যদি A ও B বিচ্ছিন্ন সেট হয় তাহলে $A - B = A$ এবং $B - A = B$.

যেমন $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$

$\therefore \quad A - B = \{1, 2, 3\} = A$

$B - A = \{4, 5, 6\} = B$

(ii) আবার যদি $A = \{2, 5, 7, 9, 10\}$, $B = \{5, 7, 9\}$ তাহলে $B \subset A$.

এক্ষেত্রে $A - B = \{2, 10\}$ কিন্তু $B - A = \phi$ এবং $A - A = \phi$.

(iii) যদি A, $B \subset U$ তাহলে $A-B$ ও $B-A$ সেট দুটির যোগকে A ও B সেটের প্রতিসম অন্তর (Symmetric difference) বলা হয়। A ও B'-র অন্তরকে $A \triangle B$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\therefore \quad A \triangle B=(A-B) \cup (B-A).$$

$$=\{x : x \in (A-B) \text{ বা } x \in B-A\}$$

উদাহরণস্বরূপ ধর $A=\{a, b, c, e\}$, $B=\{d, b, c, f)$

$$\therefore \quad A-B=\{a, e\}, B-A=\{d, f)$$

$$\therefore \quad A\triangle B=\{a, d, e, f\}$$

প্রশ্নমালা 1 C

1. যদি $A=\{1, 3, 5, 7, 11\}$, $B=\{2, 3, 4, 6, 8, 10\}$,
$C=\{3, 6, 12, 19\}$

দেখাও যে (i) $A \cup B=B \cup A$, (ii) $A \cup C=C \cup A$,
(iii) $A \cap B=B \cap A$, (iv) $B \cap C=C \cap B$
(v) $A\subset A \cup B$ এবং $B\subset A \cup B$, (vi) $A \cup B\neq A$; $A \cup B\neq B$.

2. $A=\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$, দেখাও যে
$A \cup B=B \cup A=A$

3. $A=\{9, 11, 7, 3\}$, $B=\{3, 5, 7, 9, 11\}$, $C=\{1, 2, 3, 4\}$.

নীচের সেটগুলি নির্ণয় কর:

(a) $A \cup B, A \cup C, B \cup C, A \cap B, B \cap C, C \cap A$

(b) $A \cup (B \cap C)$, $A \cap (B \cup C)$

(c) $A \cup B \cup C, A \cap B \cap C$

[$A \cup (B \cap C)$ দ্বারা A ও $B \cap C$ সেটের যোগ এবং $A \cap (B \cup C)$ দ্বারা A ও $B \cup C$ সেটের ছেদ বোঝানো হয়।]

4. যদি $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5\}$, $C=\{3, 4, 5, 6, 7\}$,
$D=\{6, 7, 8, 9\}$ তা'হলে নিম্নলিখিত সেটগুলি নির্ণয় কর।

(a) $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup D$, $A \cap D$;

(b) $A \cup C \cup D$, $A \cap C \cap D$;

(c) $A \cup (C \cap D)$, $A \cap (C \cup D)$;

(*d*) $(A \cup C) \cap (A \cup D)$;

(*e*) $(A \cap C) \cup (A \cap D)$;

(*f*) $A \cup B \cup C \cup D$, $A \cap B \cap C \cap D$.

5. যদি $A=\{a, l, g, e, b, r, a\}$, $B=\{a, r, i, t, h, m, e, c\}$, দেখাও যে $A \cap B \subset A \cup B$.

6. যদি $L_1=\{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots 20\}$, $L_2=\{1, 3, 5, 7, \cdots\cdots 19\}$, $L_3=\{3, 6, 9, \cdots\cdots 18\}$ দেখাও যে

(i) $L_1 \cap L_2=\phi$, (ii) $L_1 \cup L_3 \neq L_2 \cap L_3$,

(iii) $(L_1 \cap L_2) \cap L_3=L_1 \cap (L_2 \cap L_3)$

(iv) $L_1 \cup (L_1 \cap L_2)=L_1 \cap (L_1 \cup L_2)$.

7. ধর $A=\{a, b, d\}$, $B=\{c, d, e\}$, $C=\{a, c, d\}$, এক্ষেত্রে C সেটের প্রতিটি পদ হয় A কিংবা B কিংবা A ও B উভয়েতে আছে। যুক্তি দ্বারা দেখাও যে $C \neq A \cup B$.

8. ধর $A=\{a, b, c\}$, $B=\{b, c, d\}$, $C=\{a, b, c, d, x\}$, যুক্তি দ্বারা দেখাও যে $C \neq A \cup B$.

9. যদি $A=\{11, 13, 15, 19\}$, $B=\{12, 14, 16, 18\}$, $C=\{15, 16, 17, 18, 19\}$ তাহলে নীচের সেটগুলি নির্ণয় কর :

(*a*) $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$;

(*b*) $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cup C$;

(*c*) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

10. সেট প্রক্রিয়া সাহায্যে ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

(*a*) 4, 85, 34 ; (*b*) 20, 60, 70 ; (*c*) x^2y^3z, xy^2z^2, x^2y^2,

(*d*) $x^3+y^3+z^3-3xyz$, $(x+y)^2-z^2$, $x(x+y+z)$

(*e*) $x^2y^2(x^2-y^2)$, $x(x-y)$, $y(x-y)^2$.

11. কোন শহরের অধিবাসীদের দ্বারা কয়েকটি সেট গঠন করা হল—যেমন, A=যাঁরা ভাড়া বাড়ীতে বাস করেন, B=যাঁরা নিজের বাড়ীতে বাস করেন, C=যাঁরা থিয়েটার দেখতে ভালবাসেন, D=যাঁরা নিরামিষাশী, F=যাঁরা রাজনীতি করেন।

যোগ ও ছেদের প্রয়োগে $(A \cup B) \cup C$, $(A \cap B) \cap D$, $(C \cap D) \cup E$, $(B \cup C) \cap D$, $A \cap C \cap F$, $A \cup B \cup C \cup F$. এই সেটগুলি গঠন করা হল। এই সেটগুলিকে ভাষায় প্রকাশ কর।

12. তোমাদের স্কুলের বন্ধুদের দ্বারা একটি সেট গঠন কর এবং এই সেট থেকে কয়েকটি উপসেট গঠন কর। যেমন,

P=যারা সিনেমা দেখতে ভালবাসে, L=যারা হিন্দী সিনেমা পছন্দ করে,
R=যারা খেলাধূলা ভালবাসে, T=যারা ক্রিকেট খেলতে ভালবাসে,
V=যারা আধুনিক গান পছন্দ করে,
W=যারা আধুনিক হিন্দী গান পছন্দ করে।

I. নিম্নের সেটগুলি ভাষায় প্রকাশ কর:

(*a*) $P \cup R$, $P \cup V$, $R \cup V$, $L \cup T$, $L \cup W$, $T \cup W$

(*b*) $P \cap L$, $R \cap T$, $V \cap W$, $R \cap V$, $P \cap R$

(*c*) $P \cup R \cup V$, $L \cup T \cup W$, $P \cap R \cap V$, $L \cap T \cap W$

(*d*) $(P \cup R) \cap V$, $P \cap (R \cup V)$, $L \cup (T \cap W)$,
$(L \cap T) \cup W$, $(P \cap R) \cap W$

II. দেখাও যে (i) $P \supseteq L$, $R \supseteq T$, $V \supseteq W$
(ii) $P \cup L = P$, $R \cup T = R$, $V \cup W = V$
(iii) $P \cap Q = Q$, $R \cap T = T$, $V \cap W = W$.

13. যদি $A = \{ x : 1 < x < 25$, x — অখণ্ড সংখ্যা $\}$,
$B = \{ x : 0 < x < 1$, x — অখণ্ড সংখ্যা $\}$,
$C = \} x : 30 < x < 40$, x — অখণ্ড সংখ্যা $\}$

দেখাও যে (i) $A \cup B = A$, (ii) $A \cap C = \phi$.

14. ধর $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{6, 7, 8, 9\}$, $D = \{4, 5, 6, 7\}$

তাহলে এই সেটগুলিকে তালিকা আকারে প্রকাশ কর:

(1) A', B', C', D', U' (2) $A' \cup B$, $A' \cap B$, $A \cup B'$, $A \cap B'$, $C \cup D'$, $C' \cap D$ (3) $B' \cup D'$, $B' \cap D'$ (4) $(B' \cup D)'$, $(B' \cap D)'$

15. ধর $U = \{a, n, t, h, o, l, g, y\}$
$A = \{a, t, o, g, y\}$
$B = \{g, o, t\}$

দেখাও যে (i) $B' \subset A'$, (ii) $A \cap B' = \phi$, (iii) $A' \cup B = U$

16. ধর $A=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}\}$, $B=\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{9}\}$

তাহলে দেখাও যে (i) $A-B \neq B-A$

(ii) $(A \cup B)-(A \cap B)=(A-B) \cup (B-A)$

(iii) $A-B=A \cap B'$

17. মনে কর $A=\{3, 9, 27, 30\}$, $B=\{9, 18, 27, 36\}$

এবং $U=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36\}$.

তাহলে দেখাও যে (i) $(A \cup B)'=A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)'=A' \cup B'$

18. যদি $U=\{x : x$ অখণ্ড সংখ্যা এবং $1 \leqslant x \leqslant 9\}$

$A=\{x : x$ জোড় সংখ্যা এবং $1 < x < 9\}$

$B=\{x : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 \leqslant x \leqslant 9\}$

দেখাও যে (*a*) $A \cup A'=B \cup B'=U$

(*b*) $B \cap B'=A \cap A'=\phi$

(*c*) $U'=\phi$

(*d*) $\phi'=U$

19. যদি $P=\{a, b, c, d, x, y\}$, $A=\{a, b\}$, $B=\{a, b, c\}$, $C=\{x, y\}$, $P=\{x\}$, $E=\{a, b, c, x, y\}$. তাহলে P সাপেক্ষে A, B, C, D, E সেটগুলির পূরক নির্ণয় কর।

20. $U=\{x : x \in N$ এবং $1 \leqslant x \leqslant 10\}$,

$A=\{x : x \in N$ এবং $1 \leqslant x \leqslant 6\}$

$B=\{x : x \in N$ এবং $6 \leqslant x \leqslant 9\}$,

$C=\{x : x \in$ এবং $4 \leqslant x \leqslant 7\}$

(*a*) U সাপেক্ষে A', B', C', D', নির্ণ কর,

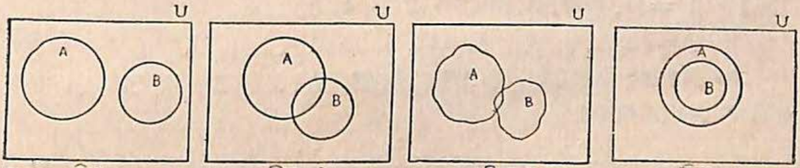
(*b*) $(A \cup B)'$, $(B \cup C)'$, $(C \cup A)'$ সেটগুলিকে প্রতীক আকারে প্রকাশ কর।

1.10. ভেন চিত্রাবলী (Venn diagrams)

গণিতের বহু বিমূর্ত (abstract) ধারণা সুস্পষ্ট করার জন্য জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্য নেওয়া হয়। সেটের যোগ, ছেদ, পূরক, অন্তর এবং তৎসম্বন্ধীয় সূত্রাবলী (formulae) ও অভেদাবলীর (identities) ধারণা

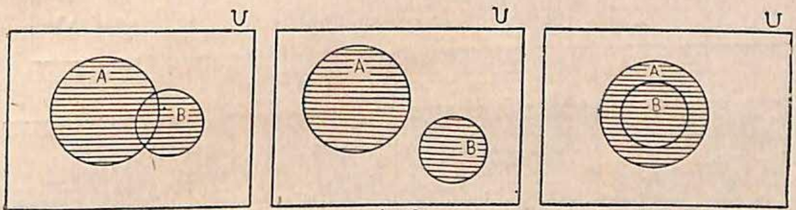
আরও স্পষ্ট করার জন্য ভেন চিত্রের* ব্যবহার হয়। এছাড়া পাটীগণিতের বহু প্রশ্নের সমাধান ভেন চিত্র দ্বারা সম্ভবপর হবে। ভেনচিত্রে সার্বিক সেটকে একটি আয়তক্ষেত্র দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং সার্বিক সেটের উপসেটগুলিকে আয়তক্ষেত্রের অন্তর্ভূক্ত বৃত্ত (বা যে কোন সীমিত ক্ষেত্র) দ্বারা সূচিত করা হয়। সসীম সেটের ক্ষেত্রে অনেক সময় সেটটির পদগুলিকে বৃত্তের মধ্যে লিখে ভেনচিত্রটি অংকন করা হয়।

নীচের চিত্রগুলিতে সার্বিক সেট U এবং উপসেট A ও B′-র ভেনচিত্র দেখান হয়েছে।



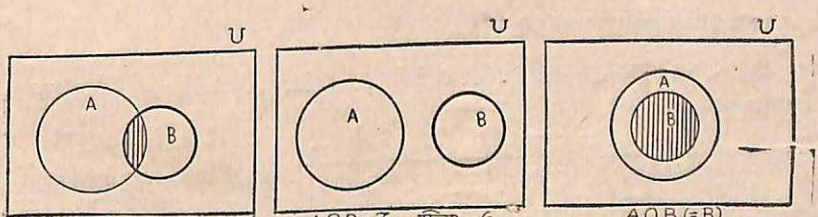
চিত্র-1 চিত্র-2 চিত্র-3 চিত্র-4

নীচের চিত্রগুলিতে A ও B সেটের **যোগ, ছেদ, পূরক** ও **অন্তর** দেখান হয়েছে।



$A \cup B$ $A \cup B$ $A \cup B$ (=A)

চিত্র 5



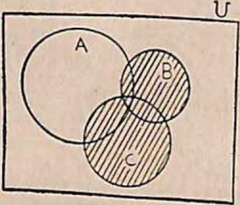
$A \cap B$ $A \cap B = \phi$ চিত্র-6 $A \cap B$ (=B)

---

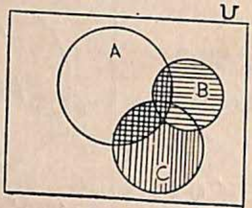
*ইংরেজী তর্ক শাস্ত্রবিদ জন্ ভেন (JOHN VENN, 1834—1923) প্রথম 1881 খৃষ্টাব্দে তাঁর 'Symbolic logic' পুস্তকে এইরূপ চিত্র ব্যবহার করেন। এই চিত্রটি VENN-EULER diagram নামেও খ্যাত।

[এক্ষেত্রেও যদি $A \supset B$, বা $A \cap B \neq \phi$, বা $A \cap B = \phi$ তাহলে প্রতিক্ষেত্রেই $A \cap B = B \cap A$ সূত্রটি সত্য।]

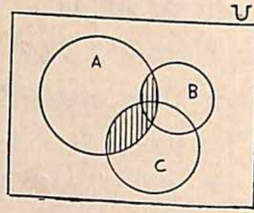
(c)



রেখাঙ্কিত অংশ $B \cup C$



ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্র দ্বারা চিহ্নিত অংশ $A \cap (B \cup C)$

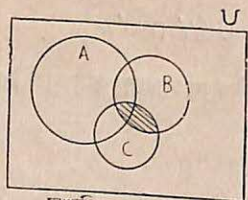


রেখাঙ্কিত অংশ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

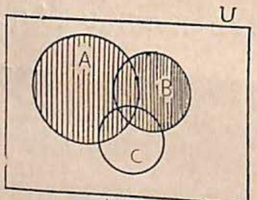
উপরের চিত্রগুলি থেকে দেখা যাচ্ছে যে

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

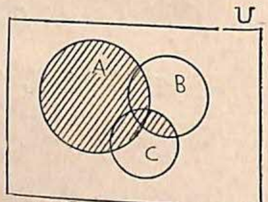
(d)



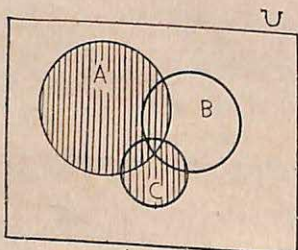
রেখাঙ্কিত অংশ $B \cap C$



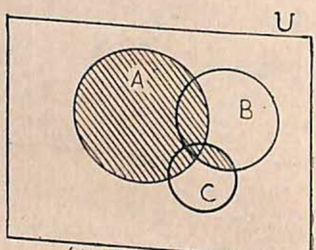
$A \cup B$



রেখাঙ্কিত অংশ $A \cup (B \cap C)$



$A \cup C$

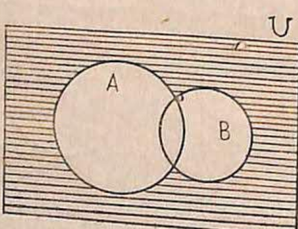


$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

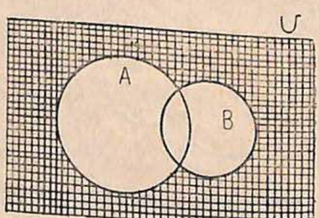
উপরের চিত্রগুলি থেকে দেখা যায় যে,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(e)



$(A \cup B)'$

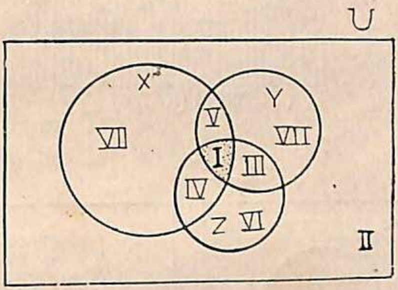


$A' \cap B'$

উপরের চিত্রগুলি থেকে দেখা যায় যে $(A \cup B)' = A' \cap B'$

উদাহরণ

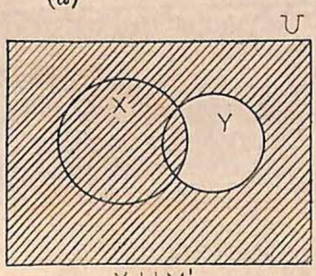
1. ভেনচিত্রে $X \cap Y \cap Z$, $X' \cap Y' \cap Z'$, $X' \cap Y \cap Z$, $X \cap Y' \cap Z$, $X \cap Y \cap Z'$, $X' \cap Y' \cap Z$, $X' \cap Y \cap Z'$, $X \cap Y' \cap Z'$ সেটগুলি চিহ্নিত কর।



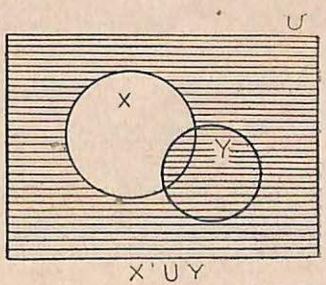
উত্তর : $X \cap Y \cap Z$ সেটের পদগুলি X এবং Y এবং Z এই তিনটি সেটে আছে। ভেন চিত্রে যে অংশটুকু X, Y, Z বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ সেই অংশটি $X \cap Y \cap Z$ সেট। ফুটকি দ্বারা এই অংশটিকে দেখান হয়েছে। I দ্বারা এই অংশটিকে চিহ্নিত করা হল। অনুরূপভাবে দেখান যায় যে $X' \cap Y' \cap Z'$, $X' \cap Y \cap Z$, $X \cap Y \cap Z'$, $X' \cap Y' \cap Z$, $X \cap Y' \cap Z'$, $X' \cap Y \cap Z$ সেটগুলি যথাক্রমে II, III, IV, V, VI, VII, VIII দ্বারা চিহ্নিত ক্ষেত্রসমূহ। লক্ষ্য কর এই আটটি সেটের যোগ হল U এবং সেটগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন।

2. (*a*) $(X \cup Y') \cap (X' \cup X)$, (*b*) $X \cup (X' \cap Y \cap Z)$ (*c*) $(X \cup X') \cap (X' \cup Z)$, (*d*) $(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ সেটগুলির ভেনচিত্র অংকন কর।

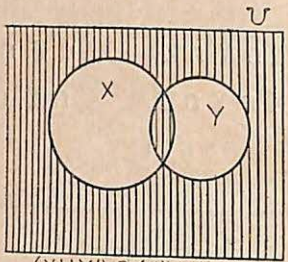
(*a*)



X ∪ Y'

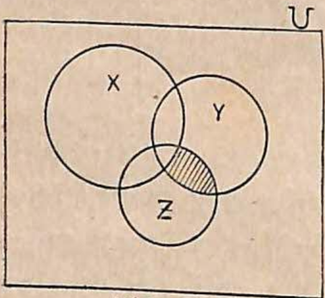


X' ∪ Y

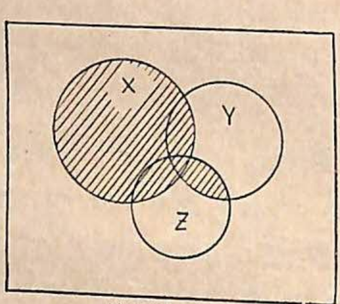


$(X \cup Y') \cap (X' \cup Y)$

(b)

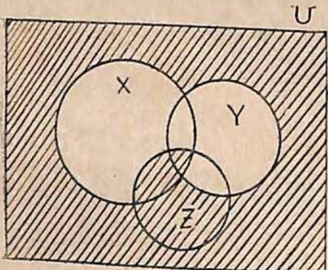


$X' \cap Y \cap Z$

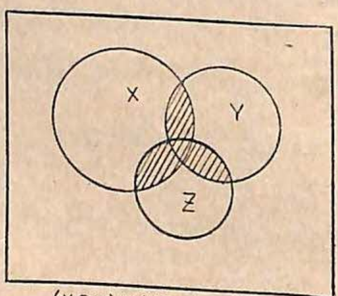


$X \cup (X' \cap Y \cap Z)$

(c)



$(X \cup Y') \cap (X' \cup Z)$



$(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$

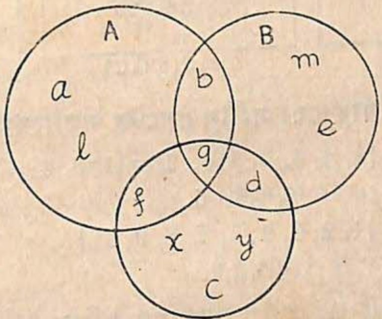
3. ধর $A=\{a, b, f, g, l\}$, $B=\{m, b, g, d, e\}$, $C=\{x, y, f, g, d\}$, ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখাও যে (i) $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cup (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

উত্তর : $A \cap B=\{b, g\}$, $A \cap C=\{f, g\}$, $B \cap C=\{g, d\}$

$A \cup B=\{a, l, b, g, f, m, e, d\}$, $A \cup C=\{a, b, g, l, f, x, y, c, d\}$

$B \cup C = \{b, g, m, e, d\ f, x, y, c\}$
$A \cup (B \cap C) = \{a, f, b, g, l, d\}$
$(A \cap B) \cap C = \{g\}$



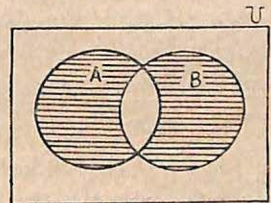
উপরের ভেনচিত্র থেকে দেখা যায় যে $A \cap B \cap C = \{g\}$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a, f, b, g, l, d\}$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{b, g, f\}$

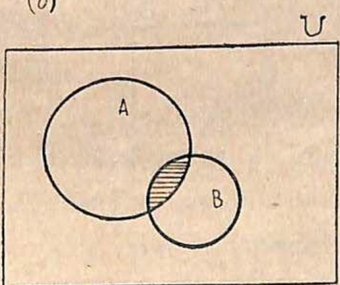
4. (a) $(A-B) \cup (B-A)$, (b) $(A-B') \cup (A-B)$,
(c) $[A \cup (B' \cap C)] - A \cap C$, এই সেটগুলির ভেনচিত্র অংকন কর।

উত্তর ঃ (a)

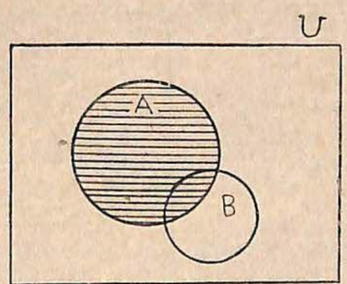


(A – B) U (B – A)

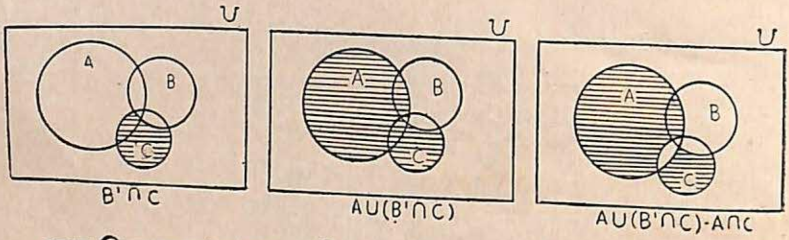
(b)



A-B' (=A∩B)



(A-B')U(B-A)(=A)



ভেন চিত্রের সাহায্যে সসীম সেটের পদসংখ্যা নির্ণয়।

মনে কর $A=\{2, 4, 5, 9, 10\}$, $B=\{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$. A-সেটের পদসংখ্যা 5 এবং B সেটের পদসংখ্যা 6.

$A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$

$\therefore$ $A \cup B$ সেটের পদসংখ্যা 9.

যদি $n(A)$ দ্বারা A সেটের পদসংখ্যা সূচিত করা হয় তাহলে এক্ষেত্রে $n(A)=5$; অনুরূপভাবে বলা যায় $n(B)=6$ এবং $n(A \cup B)=9$

সুতরাং $n(A)+n(B) > n(A \cup B)$.

লক্ষ্য কর যে $A \cap B=\{4, 5\} \neq \phi$ এবং $n(A \cap B)=2$.

অতএব এই উদাহরণ থেকে বলা যায় যে

$$n(A \cup B)+n(A \cap B)=n(A)+n(B).$$

আবার যদি $A=\{a, b, c\}$, $B=\{x, y, w, t\}$ তাহলে $n(A)=3$, $n(B)=4$ এবং $n(A \cup B)=7$.

$$\therefore \quad n(A)+n(B)=n(A \cup B).$$

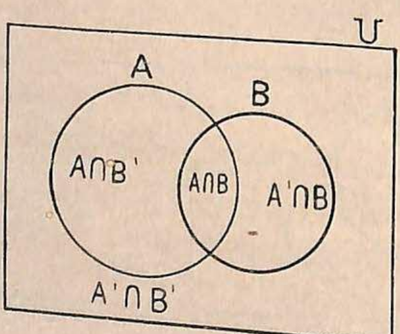
এখন আমরা যে কোন দুটি সসীম সেটের পদসংখ্যা সম্পর্কিত একটি সূত্র প্রমাণ করব। সূত্রটি হল এরকম।

সূত্র : যদি A ও B দুটি সসীম সেট হয় এবং $n(A)$ ও $n(B)$ যদি সেট দুটির পদসংখ্যা হয় তাহলে ভেনচিত্রের সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে

$$n(A \cup B)+n(A \cap B)=n(A)+n(B)$$

অথবা $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

প্রমাণ :



পূর্বের অনুচ্ছেদে দেখেছ যে A সেটটিকে $A \cap B'$ ও $A \cap B$ সেট দুটির যোগ হিসেবে ভাবা যায় এবং B সেটটিকে $A \cap B$ ও $A' \cap B$ সেটদ্বয়ের যোগ হিসেবে ভাবা যায়। উপরের চিত্র থেকে বলা যায় যে

$$A=(A \cap B) \cup (A \cap B)$$

$$B=(A \cap B) \cup (A \cap B')$$

চিত্র থেকে দেখা যায় যে $A \cap B'$, $A \cap B$, $A \cap B'$ সেটগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন। সুতরাং A'-র পদসংখ্যা $A \cap B'$ ও $A \cap B$ সেট দুটির পদসংখ্যার যোগফলের সমান।

$$\therefore \quad n(A)=n(A \cap B')+n(A \cap B)$$

অনুরূপভাবে বলা যায় $n(B)=n(A \cap B)+n(A \cap B')$

যোগ করে পাই $n(A)+n(B)=n(A \cap B')+2n(A \cap B)+n(A \cap B')$ ......(I)

ভেন চিত্র থেকে আরও বলা যায় যে

$$A \cup B=(A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A \cap B').$$

$A \cup B'$, $A \cap B$, $A \cap B'$ সেটগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন সুতরাং $A \cup B$ সেটের পদসংখ্যা $A \cap B'$, $A \cap B$, $A \cap B'$ সেটগুলির পদসংখ্যার যোগফলের সমান।

$$\therefore \quad n(A \cup B)=n(A' \cap B)+n(A \cap B)+n(A \cap B') \cdots\cdots (II)$$

(I) থেকে (II) বিয়োগ করে পাই,

$$n(A)+n(B)-n(A \cup B)=n(A \cap B)$$

$$\therefore \quad n(A \cup B)=n(A)+n(B-n(A \cap B)$$

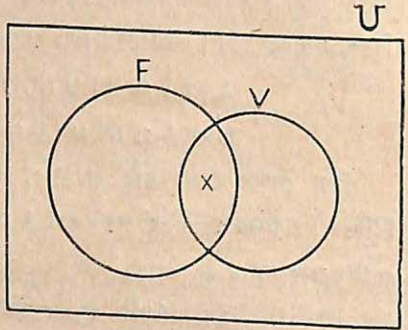
[**বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ** যদি A ও B সেট দুটি বিচ্ছিন্ন হয় তাহলে $A \cap B=\phi$. আবার সংজ্ঞা থেকে পাই যে ϕ সেটে কোন পদ নেই অর্থাৎ $n(\phi)=0$

$$\therefore \quad n(A \cup B)=n(A)+n(B)$$]

এই সূত্রটির সহায়তায় অনেক প্রশ্নের সমাধান সম্ভব। এখন এই সূত্রের সাহায্যে কয়েকটি প্রশ্নের সমাধান দেখান হবে।

1. একটি স্কুলের ছাত্রসংখ্যা 450, এদের মধ্যে 200 জন ফুটবল খেলতে পারে, 300 জন ভলিবল খেলতে পারে এবং 20 জন খেলাধুলায় অংশ গ্রহণ

করে না। ভেনচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর কতজন ছাত্র ফুটবল ও ভলি উভয় খেলায় অংশ গ্রহণ করে।



ধর U=স্কুলের সকল ছাত্রদের সেট, F=ফুটবল খেলোয়াড়দের সেট, V=ভলিবল খেলোয়াড়দের সেট।

এখানে $n(F)=200$, $n(V)=300$. যেহেতু F ও V সেটের পদসংখ্যার সমষ্টি U সেটের পদসংখ্যার চেয়ে বড়, সুতরাং কিছু ছাত্র আছে যারা উভয়খেলায় অংশ গ্রহণ করে। যদি উভয় খেলায় অংশ গ্রহণকারী ছাত্রদের সংখ্যা x হয় তাহলে

$$n(F \cap V'=x$$

এখন $n(U)=450$ এবং 20 জন কোন খেলায় অংশ গ্রহণ করে না অতএব $450-20=130$ জন ছাত্র খেলাধূলায় অংশ গ্রহণ করে।

$$\therefore \quad n(F \cup U)=430$$

আবার সূত্র থেকে পাই

$$n(F \cup V)=n(F)+n(V)-n(F \cap V)$$

$$430=200+300-x \qquad \therefore \quad x=70$$

সুতরাং 70 জন ছাত্র ফুটবল ও ভলিবল উভয় খেলায় অংশ গ্রহণ করে।

2. কোন ক্লাশে 40 জন ছাত্র ভূগোল পড়ে, 20 জন ছাত্র বিজ্ঞান পড়ে। তাহলে কতজন ছাত্র ভূগোল কিংবা বিজ্ঞান পড়ে যদি (a) ভূগোল ও বিজ্ঞানের ক্লাশ একই সময়ে শুরু হয়, (b) ভূগোল ও বিজ্ঞানের ক্লাশ বিভিন্ন সময়ে শুরু হয় এবং 15 জন ছাত্র উভয় বিষয়ই পড়ে।

যদি A ও B দ্বারা যথাক্রমে ভূগোল ও বিজ্ঞান পড়ে এমন ছাত্রদের সেট বোঝানো হয় তাহলে $n(A)=40$, $n(B)=20$.

(a) যদি একই সময়ে ভূগোল ও বিজ্ঞানের ক্লাশ শুরু হয় তাহলে কোন ছাত্রই উভয় বিষয় পড়তে পারবে না। অতএব $n(A \cap B)=0$

$$\therefore \quad n(A \cup B)=n(A)+n(B)$$

বা, $n(A \cup B)=40+20$, বা, $n(A \cap B)=60$

সুতরাং 60 জন ছাত্র ভূগোল কিংবা বিজ্ঞান পড়ে।

(*b*) এক্ষেত্রে $n(A \cap B)=15$

$\therefore \quad n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

$n(A \cup B)=40+20-15$

$\therefore \quad n(A \cup B)=45$

সুতরাং 45 জন ছাত্র ভূগোল এবং বিজ্ঞান উভয় বিষয়ই পড়ে।

প্রশ্নমালা 1d

1. নিম্নলিখিত সেটগুলির ভেন চিত্র অংকন কর :

(*a*) $A \cup (B \cap C)$, (*b*) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, (*c*) $(A \cup B') \cap (A' \cap B)$, (*d*) $A' \cap (B \cup C)$

2. ভেন চিত্রের সাহায্যে শূন্যস্থানগুলি পূরণ কর :

(*a*) $P \cap P=\cdots$, (*b*) $A \cup U=\cdots$, (*c*) $A \cup \phi=\cdots$,

(*d*) $A \cap \phi=\cdots$, (*e*) $A \cap U=\cdots$, (*f*) $P \cup P=\cdots$

[এখানে U-সার্বিক সেট এবং ϕ শূন্য সেট]

3. যদি $A \subseteq B$, দেখাও যে

(*a*) $(A \cup B) \cap B'=A \cap B'$ (*b*) $A \cap (B \cup B')=A$

(*c*) $A \cap (B \cap B')=\phi$ (*d*) $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$

4. ভেন চিত্রের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

$$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(c)-n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C)$$

5. 17 জন ব্যক্তির মধ্যে 5 জন দুধ ও চিনি ছাড়া চা পছন্দ করে, 8 জন চিনি ছাড়া চা পছন্দ করে এবং 10 জন চিনি দেওয়া চা পছন্দ করে। সকল ব্যক্তিই চা পান করে। কতজন ব্যক্তি দুধ ও চিনি শুদ্ধ চা পান করে তা ভেন চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

6. ভেন চিত্রের সাহায্যে দেখাও যে,

(*a*) $A-B= A \cap B'$ (*b*) $(A-B) \cup (A \cap B)=A$

(*c*) $(A-B) \cap (A \cap B)=\phi$ (*d*) $(A-B)'=A' \cup B$

(*e*) $(A-B) \cap (B-A)=\phi$.

7. একটি স্কুলের 76 জন ছাত্রের মধ্যে 14 জন পড়াশুনায় ভাল, 31 জন খেলাধূলায়উৎসাহী, 20 জল গান-বাজনা করে, 5 জন খেলাধূলা ও পড়াশুনায়

ভাল, 8 জন খেলাধূলা ও গানবাজনায় অংশ গ্রহণ করে, 6 জন পড়াশুনা ও গানবাজনা করে এবং 2 জন তিনটিতেই অংশ গ্রহণ করে। ভেন চিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত ছাত্রদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

(*a*) পড়াশুনা ও খেলাধূলা করে কিন্তু গানবাজনা করে না,

(*b*) খেলাধূলা ও গানবাজনা করে কিন্তু পড়াশুনা করে না,

(*c*) গানবাজনা ও পড়াশুনা করে কিন্তু খেলাধূলা করে না,

(*d*) খেলাধূলা, পড়াশুনা, গানবাজনা কিছুই করে না।

8. $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $X=\{2, 4, 6, 8\}$, $Y=\{1, 3, 5, 7\}$, $Z \cap Y=\{1, 3\}$, $Z \cup Y=\{1, 2\ 3, 5, 7, 9\}$
ভেন চিত্র ব্যবহার করে (*a*) Z সেটের পদ সংখ্যা,
(*b*) $n(X)-n(Z \cap X)$, (*c*) $n(Z \cup X)-n(Z \cup Y)$ নির্ণয় কর।

1.11. সেট সম্বন্ধীয় মূল সূত্রাবলী বা অভেদাবলী

দ্বিপদ প্রক্রিয়াঃ যদি A ও B সার্বিক সেট U এর যে কোন দুটি উপসেট হয় তাহলে A ও B'র উপর **যোগ প্রক্রিয়া** আরোপ করলে আর একটি সেট $A \cup B$ পাওয়া যায় এবং $A \cup B$ সেটটি U সেটের একটি উপসেট। এখানে যোগ প্রক্রিয়াকে দ্বিপদ প্রক্রিয়া (binary operation) বলে, কেন না এই প্রক্রিয়াটি আরোপের জন্য দুটি সেটের প্রয়োজন হয়। অনুরূপ ভাবে সেটের ছেদ প্রক্রিয়াকে ও দ্বিপদী প্রক্রিয়া বলা হয়। অন্যদিকে পূরক প্রক্রিয়াটি দ্বিপদী নয়। পূরক প্রক্রিয়ার জন্য মাত্র একটি পদের প্রয়োজন হয়। এজন্য পূরককে একপদী প্রক্রিয়া (unary operation) বলা হয়।

ধর *a* ও *b* সেট S-এর **যে কোন** দুটি পদ অর্থাৎ $a \in S$ এবং $b \in S$. একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া (*) S সেটের উপর প্রযোজ্য হবে যদি $a * b \in S$. এক্ষেত্রে S সেটকে দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে বদ্ধ (closed) বলা হয়।

যদি U সার্বিক সেট হয় এবং $A, B \subset U$ তাহলে $A \cup B \subset U$ এবং $A \cap B \subset U$. অতএব '∪' এবং '∩' প্রক্রিয়া দুইটি দ্বিপদী এবং U সেটটি '∪', '∩' দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে বদ্ধ। অনুরূপভাবে বলা যায় যে U সেটটি একপদী প্রক্রিয়া 'পূরক' সাপেক্ষে বদ্ধ। উপরের আলোচনা হতে বলা যায় U সেটটি দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '∪', '∪' এবং একটি একপদী প্রক্রিয়া (''') সাপেক্ষে বদ্ধ।

পূর্বে সেট সম্পর্কিত বহু সূত্র ভেন চিত্রের সাহায্যে দেখান হয়েছে। এখন এই সূত্রগুলির বীজগাণিতিক প্রমাণ দেওয়া হবে।

I. যোগ ও ছেদ সম্বন্ধীয় কয়েকটি সূত্র ঃ

সূত্র 1. যদি A ও B সার্বিক সেট U'র কোন দুটি উপসেট হয় তাহলে দেখাও যে (i) $A \cup B = B \cup A$

(ii) $A \cup B = B \cap A$

[এই সূত্র দুটিকে যোগ ও ছেদ সাপেক্ষে **বিনিময় সূত্র** (commutative law) বলা হয়।]

প্রমাণ ঃ (i) যোগ-এর সংজ্ঞা থেকে পাই

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ বা } x \in B\}$$
$$= \{x : x \in B \text{ বা } x \in A\}$$
$$= B \cup A$$
$$\therefore \; A \cup B = B \cup A$$

(ii) ছেদের সংজ্ঞা থেকে পাই

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ এবং } x \in B\}$$
$$= \{x : x \in B \text{ এবং } x \in A\}$$
$$= B \cap A$$
$$\therefore \; A \cap B = B \cap A$$

সূত্র 2. যদি $A, B, C \subset U$ তাহলে দেখাও যে

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

এই সূত্র দুইটিকে যোগ ও ছেদ সাপেক্ষে **সংযোগ সূত্র** (Associative law) বলা হয়।

প্রমাণ ঃ (i) $A \cup (B \cup C) = \{x : x \in A \text{ বা } x \in B \cup C\}$

$$= \{x : x \in A \text{ বা } (x \in B \text{ বা } x \in C)\}$$
$$= \{x : x \in A \text{ বা } x \in B \text{ বা } x \in C\}$$
$$= \{x : (x \in A \text{ বা } x \in B) \text{ বা } x \in C\}$$
$$= \{x : x \in A \cup B \text{ বা } x \in C\}$$
$$= (A \cup B) \cup C$$
$$\therefore \; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

(ii) $A \cap (B \cap C) = \{x : x \in A$ এবং $x \in B \cap C\}$

$= \{x : x \in A$ এবং $(x \in B$ এবং $x \in C)\}$

$= \{x : x \in A$ এমং $x \in B$ এবং $x \in C\}$

$= \{x : x \in A \cap B$ এবং $x \in C\}$

$= (A \cap B) \cap C$

$\therefore\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup C$

এই সূত্র দুইটি হতে দেখা যায় যে বন্ধনীর বিশেষ কোন গুরুত্ব এতে নেই। সুতরাং $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ লেখা যায় এবং $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ লেখা যায়।

উপপাদ্য 1. A ও B সেট দুটি একে অপরের উপসেট নয় তাহলে দেখাও যে,

(i) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$

(ii) $A \cap B \subset B \subset A \cup B$

প্রমাণ ঃ যদি x, A সেটের যে কোন পদ হয় তাহলে x-কে $A \cup B$ সেটের পদ বলা যায়।

অর্থাৎ, $x \in A$ থেকে পাই $x \in A \cup B$

আবার $A \cup B$ সেটে অন্ততঃ একটি পদ আছে Aতে নেই। সুতরাং $A \subset A \cup B$ ... ...(1)

যদি y $A \cap B$ সেটের যে কোন একটি পদ হয় তাহলে $y \in A \cap B$ থেকে পাই $y \in A$. এছাড়া A সেটে অন্ততঃ একটি পদ আছে যা $A \cap B$তে নেই।

$\therefore\ A \cap B \subset A$ ... .. (2)

(1) এবং (2) থেকে পাই

$A \cap B \subset A \subset A \cup B$

অনুরূপভাবে দেখান যায় যে $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.

সূত্র 3. যদি $A, B, C \subset U$ তাহলে দেখাও যে

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = A \cup B) \cap (A \cap C)$

এই সূত্র দুটিকে সেটের **বিচ্ছেদ নিয়ম** (Distributive laws) বলা হয়।

প্রমাণঃ (i) ধরা যাক x A ∪ (B ∩ C) সেটের যে কোন একটি পদ। অর্থাৎ $x \in A \cup (B \cap C)$.

এখান থেকে দুটি সম্ভাবনা পাওয়া যায়ঃ

(*a*) $x \in A$, (*b*) $x \notin A$, এই ক্ষেত্রে নিশ্চিত ভাবে বলা যায় যে $x \in B \cap C$.

যদি $x \in A$ তাহলে উপপাদ্য 3 থেকে পাই $x \in A \cup B$ এবং $x \in A \cup C$,

অর্থাৎ $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

আবার যদি $x \notin A$ তাহলে $x \in B \cap C$ অর্থাৎ $x \in B$ এবং $x \in C$.

$x \in B$ এবং $x \in C$ থেকে পাই $x \in A \cup B$ এবং $x \in A \cup C$

$\therefore \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

অতএব উভয় ক্ষেত্রেই পাই যে যদি $x \in A \cup (B \cap C)$ তাহলে $x \in (A \cup B) \cap B \cup C)$.

$\therefore \quad A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \cdots \quad \cdots(1)$

আবার ধরা যাক y, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ সেটটির যে কোন পদ অর্থাৎ $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

অতএব $y \in A \cup B$ এবং $y \in A \cup C$.

অর্থাৎ $y \in$ (A বা B) এবং ($y \in$ A বা C)

অর্থাৎ $y \in$ A বা ($y \in B$ এবং $y \in C$)

অর্থাৎ $y \in$ A বা $y \in B \cap C$

অর্থাৎ $y \in A \cup (B \cap C)$

$\therefore \quad (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cup (B \cap C) \quad \cdots \quad \cdots(2)$

(1) এবং (2) থেকে পাই $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$\therefore \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(*ii*) ধরা যাক $x \in A \cap (B \cup C)$

$\therefore \quad x \in A$ এবং $x \in B \cup C$

আবার $x \in B \cup C$ থেকে পাই $x \in B$ অথবা $x \notin B$ কিন্তু $x \in C$

অতএব $x \in A$ এবং $x \in B \cup C$ থেকে পাই

$x \in A$ এবং $x \in B$ অথবা $x \in A$ এবং $x \in C$

অর্থাৎ $x \in A \cap B$ বা $x \in A \cap C$

অর্থাৎ $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

যেহেতু x হল $A \cap (B \cup C$ -র যে কোন পদ,

অতএব $A \cup (B \cup C \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ... (1)

আবার যদি $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ তাহলে $y \in A \cap B$

বা $y \in A \cap C$ [সেক্ষেত্রে $y \notin A \cup B$]

অর্থাৎ ($y \in A$ এবং $y \in B$) অথবা ($y \in A$ এবং $y \in C$)

অর্থাৎ $y \in A$ এবং ($y \in B$ বা $y \in C$)

অর্থাৎ $y \in A$ এবং $y \in B \cup C$

অর্থাৎ $y \in A \cap (B \cup C)$.

যেহেতু y হল $(A \cap B) \cup (A \cup C)$ সেটের যে কোন একটি পদ,

অতএব $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ ... (2)

(1) এবং (2) থেকে পাই,

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$\therefore \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

সূত্র 4. যদি $A, B \subset \mathbf{U}$ তাহলে দেখাও যে

(*i*) $A \cup (A \cap B) = A$

(*ii*) $A \cap (A \cup B) = A$

এই সূত্র দুটিকে **বিশোষণ সূত্র বা Absorption laws** বলা হয়।

প্রমাণঃ (1) যদি $x \in A \cup (A \cap B)$ তাহলে $x \in A$

বা $x \in A \cap B$.

উপপাদ্য 3 থেকে পাই $A \cap B \subset A$,

সুতরাং $x \in A \cup (A \cap B)$ থেকে পাই $x \in A$

$\therefore \quad A \cup (A \cap B) \subseteq A$ ... (1)

আবার যদি $x \in A$ তাহলে $x \in A$ বা $x \in A \cap B$

$\therefore \quad x \in A \cup (A \cap B)$

$\therefore \quad A \subseteq A \cup (A \cap B)$ ... (2)

(1) এবং (2) থেকে পাই $A = A \cup (A \cap B)$

(ii) অনুরূপ ভাবে দেখান যায় যে $A \cap (A \cup B) = A$.

সূত্র 5 দেখাও যে (i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cap A = A$.

প্রমাণ : (i) যদি $x \in A \cup A$ তাহলে বলা যায় যে $x \in A$.

অর্থাৎ $A \cup A \subseteq A$

আবার যদি $y \in A$ তাহলে বলা যায় যে $y \in A \cup A$

$\therefore A \subseteq A \cup A$ $\therefore A = A \cup A$

(ii) অনুরূপভাবে দেখান যায় যে $A \cap A = A$

উপপাদ্য 2. যদি $A \subset B$ তাহলে দেখাও যে

(i) $A \cup B = B$ (ii) $A \cap B = A$

প্রমাণ (1) ধর $x \in A \cup B$ সুতরাং $x \in A$ বা $x \in B$.

কিন্তু $A \subset B$, অতএব যদি $x \in A$ তাহলে $x \in B$ বলা যায়।

$\therefore$ $x \in A \cup B$ থেকে পাই $x \in B$

$\therefore A \cup B \subseteq B$ ... ... (1)

আবার ধর $y \in B$, যেহেতু $A \subset B$, $y \in B$ থেকে পাই

$y \in B$ বা $y \in A$

অর্থাৎ $y \in A \cup B$

$\therefore B \subseteq A \cup B$ ... ... (2)

(1) এবং (2) থেকে পাই

$A \cup B = B$

(ii) অনুরূপভাবে দেখান যায় যে $A \cap B = A$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. $A \subseteq U$

$\therefore A \cup U = U$

এবং $A \cap U = A$

অনুসিদ্ধান্ত 2. পূর্বেই জেনেছ যে $\phi \subset A$

$\therefore \phi \cup A = A$

এবং $\phi \cap A = \phi$

II. পূরক সম্বন্ধীয় কয়েকটি সূত্র :

সূত্র 6. যদি $A \subset U$ তাহলে দেখাও যে $(A')' = A$

প্রমাণ : ধরা যাক $x \in (A')'$

$\therefore x \in U$ এবং $x \notin A'$

অর্থাৎ $x \in U$ এবং $x \in A$

অর্থাৎ $x \in A$

$\therefore \ (A')' \subseteq A \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

আবার ধরা যাক $y \in A$

$\therefore \ y \in A$ এবং $y \in U$

$\therefore \ y \notin A'$ এবং $y \in U$

$\therefore \ y \in (A')'$

সুতরাং $A \subseteq (A')' \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

(1) এবং (2) থেকে পাই $(A')' = A$

সূত্র 7. ডি-মরগাণের সূত্রাবলী (De-Morgan's Laws).

যদি $A, B \subset U$, দেখাও যে

(*i*) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(*ii*) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

প্রমাণ : ধরা যাক $x \in (A \cup B)'$

$\therefore \ x \in U$ এবং $x \notin A \cup B$

$\therefore \ x \in U$ এবং $(x \notin A$ বা $x \notin B)$

যেহেতু $x \in U$ এবং $x \notin A$, অতএব $x \in A'$, আবার যেহেতু $x \in U$ এবং $x \notin B$, অতএব $x \in B'$

$\therefore \ x \in (A \cup B)'$ থেকে পাই $x \in A'$ এবং $x \in B'$

অর্থাৎ $x \in A' \cap B'$

$\therefore \ (A \cup B)' \subseteq A' \cap B' \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

আবার ধরা যাক $y \in A' \cap B'$, অর্থাৎ $y \in A'$ এবং $y \in B'$.

যেহেতু $y \in A'$ সুতরাং $y \in U$ এবং $y \notin A$,

যেহেতু $y \in B'$ সুতরাং $y \in U$ এবং $y \notin B$,

অতএব $y \in A'$ এবং $y \in B'$ থেকে পাই $y \in U$

কিন্তু $y \notin A$ এবং $y \notin B$

$\therefore \ y \in U$ এবং $y \notin A \cup B$

$\therefore \ y \in (A \cup B)'$

$\therefore \ A' \cap B' \subseteq (A \cup B)' \quad \cdots \quad (2)$

(1) এবং (2) থেকে পাই

$$(A \cup B)'' \subseteq A' \cap B'$$

$$(A \cup B)' \supseteq A' \cap B'$$

$$\therefore \quad (A \cup B)' = A' \cap B' \quad \ldots \quad \cdots \quad (2)$$

(*ii*) মনে কর $x \in (A \cap B)'$ অতএব $x \in U$ এবং $x \notin A \cap B$

$x \notin A \cap B$ থেকে পাই $x \in A'$ বা $x \in B'$

$\therefore$ $x \in (A \cap B)'$ থেকে পাই ($x \in A'$ বা $x \in B'$)

অর্থাৎ $x \in A' \cup B'$

$$\therefore \quad (A \cap B)' \subseteq A' \cup B' \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

আবার যদি $y \in A' \cup B'$ তাহলে $y \in A'$ বা $y \in B'$,

অর্থাৎ $y \in U$ এবং $y \notin A$ বা $y \in U$ এবং $y \notin B$

অর্থাৎ $y \in U$ এবং $y \notin A \cap B$

অর্থাৎ $y \in (A \cap B)'$

$$\therefore \quad (A' \cup B') \subseteq (A \cap B)' \quad \cdots \quad (2).$$

(1) এবং (2) থেকে পাই

$$(A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$$

$$(A \cap B)' \supseteq A' \cup B'$$

$$\therefore \quad (A \cup B)' = A' \cup B'$$

উপপাদ্য 3. যদি $A, B \subset U$ এবং $x \in U$ তাহলে প্রমাণ কর যে x চারিটি সেট $A \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cap B$, $A' \cap B'$-এর যে কোন একটি মাত্র সেটের পদ।

প্রমাণ: পূরকের সংজ্ঞা থেকে পাই যে যদি $x \in U$ তাহলে $x \in A$ অথবা $x \in A'$. (x উভয় সেট A ও A'-র পদ হতে পারে না)।

(*a*) যদি $x \in A$ তাহলে x হয় B না হয় B' সেটের পদ হবে কিন্তু B ও B''র সাধারণ পদ হতে পারে না।

অতএব $x \in A$ এবং $x \in B$, অথবা $x \in A$ এবং $x \in B'$

অর্থাৎ $x \in A \cap B$ কিংবা $x \in A \cap B'$ $\quad \cdots \quad (1)$

(b) যদি $x \in A'$ তাহলে x হয় B না হয় B'-এ থাকবে,

অতএব $x \in A'$ এবং $x \in B$, অথবা $x \in A'$ এবং $x \in B'$

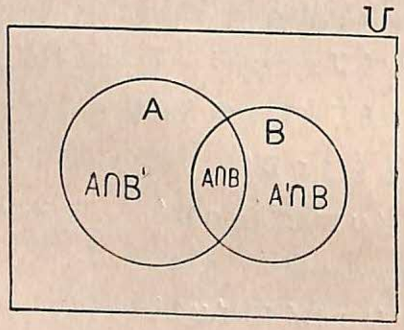
অর্থাৎ $x \in A' \cap B$ অথবা $x \in A' \cap B$ .... (2)

সুতরাং (1) এবং (2) থেকে পাই যে $x \in A \cap B$

অথবা $x \in A \in B'$ অথবা $x \in A' \cap B$ অথবা $x \in A' \cap B'$.

[লক্ষ্য কর যে $A \cap B$, $A' \cap B$, $A' \cap B'$ সেট চারটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B') = U$.

নীচের ভেন চিত্র থেকে উপপাদ্যটি সহজেই প্রমাণ করা যায়।



যদি $x \in U$ তাহলে U আয়তক্ষেত্রটি যে চারটি অংশে বিভক্ত হয়েছে তার যে কোন একটি অংশে x থাকবে।]

সেট সূত্রাবলীর তালিকা ঃ

পূর্বে সেটের যোগ, ছেদ ও পূরক সম্বন্ধীয় যে সব সূত্রগুলি উপপাদ্য আকারে বর্ণনা করা হয়েছে সেগুলি সারণি আকারে এভাবে প্রকাশ করা যায়।

বিনিময় সূত্র (Commutative laws)	
1*a*. $A \cup B = B \cup A$	1*b*. $A \cap B = B \cap A$
সংযোগ সূত্র (Associative laws)	
2*a*. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	2*b*. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
ইডিম্‌পোটেন্ট সূত্র (Idempotent laws)	
3*a*. $A \cup A = A$	3*b*. $A \cap A = A$
বিচ্ছেদ সূত্র (Distributive laws)	
4*a*. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4*b*. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$
বিশোষন সূত্র (Absorption laws)	
5*a*. $A \cup (A \cap B) = A$	5*b*. $A \cap (A \cup B) = A$
(Identity laws)	
6*a*. $A \cup \phi = A$	6*b*. $A \cap \phi = \phi$
7*a*. $A \cup U = U$	7*b*. $A \cap U = A$
পূরক সম্বন্ধীয় সূত্র (Laws of complementation)	
8*a*. $A \cup A' = U$	8*b*. $A \cap A' = \phi$
9*a*. $U' = \phi$	9*b*. $\phi' = U$
16. $(A')' = A$	
ডি-মরগানের সূত্র (De-Morgan's laws)	
11*a*. $(A \cup B)' = A' \cap B'$	11*b*. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

সারণি নং 1

উপরের সারণিতে 21টি সূত্রের উল্লেখ করা হয়েছে। এখানে A, B, C সার্বিক সেট U'র উপসেট।

এই সূত্রগুলির মধ্যে (3a), (3b`, (4a), (5a), (5b) সূত্রগুলি সংখ্যার ক্ষেত্রে সিদ্ধ নয়। যদি A, B, C'-র পরিবর্তে a, b, c সংখ্যা ধরা হয় এবং '∪'-এর পরিবর্তে '+', '∩'-এর পরিবর্তে '.' ধরা হয় তাহলে $a+a\neq a$, $a\,.\,a\neq a$; $a+b\,.\,c\neq(a+b)\,.\,(a+c)$ কিন্তু $a\,.(b+c)=a\,.\,b+a\,.\,c$. সুতরাং বীজগণিতে যে সব সূত্রের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয় বা সরলীকরণ সম্ভব সেই সূত্রগুলির সাহায্যে সেট রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় বা সরলীকরণ সম্ভবপর নয়। এছাড়া পূরক সম্বন্ধীয় কোন সূত্রই সংখ্যার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয়।

যে সব সূত্র শুধু সেটের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য কিন্তু সংখ্যার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয় তাদের সারণি আকারে লেখা হল।

শুধু সেটের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য সূত্রাবলী	সেট ও সংখ্যার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য সূত্রাবলী
1. A+BC=(A+B) . (A+C)	1. A . (B+C)=A . B+A . C
2. A+A=A	2. A . B=B . A
3. A . A=A	3. A+B=B+A
4. A . (A+B)=A	4. A . (B . C)=(A . B) . C
5. A+A . B=A	5. A . (B+C)=A . B+A . C

সারণি নং 2

[এই তালিকাতে 'U'-এর পরিবর্তে '+', '∩'-এর পরিবর্তে '.' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।]

1.13 দ্বৈততানীতি (Principle of Duality)

সারণি 1-তে মূল সূত্রগুলির উল্লেখ করা হয়েছে তারা একটি বিশেষ নীতি মেনে চলে। লক্ষ্য কর যে, যে-কোন সূত্রে

(*i*) '∪'-র পরিবর্তে '∩'

(*ii*) '∩'-র পরিবর্তে '∪'

এবং (*iii*) 'U'-র পরিবর্তে 'ϕ'

(*iv*) 'ϕ'-র পরিবর্তে U

ব্যবহার করলে অন্য একটি সূত্র পাওয়া যায় যা সেটের ক্ষেত্রে সত্য। যেমন A ∪ B=B ∪ A সূত্রে '∪'-র পরিবর্তে '∩' ব্যবহার করলে A ∩ B=B ∩ A সূত্রটি পাওয়া যায় এবং এই সূত্রটি সেটের ক্ষেত্রে সিদ্ধ।

যদি সেটের যোগ, ছেদ বা পূরক সম্বন্ধীয় কোন সূত্রে (*a*) '∪'-এর পরিবর্তে '∩' ও এবং '∪ -এর পরিবর্তে ব্যবহার করা হয় এবং (*b*) U-এর পরিবর্তে ϕ ও ϕ-এর পরিবর্তে U ব্যবহার করা হয় তাহলে যে সূত্রটি পাওয়া যায় তা যদি সেটের ক্ষেত্রে সিদ্ধ হয় তাহলে প্রথম সূত্রটিকে দ্বিতীয় সূত্রটির দ্বৈত (dual) বা দ্বিতীয়টিকে প্রথমটির দ্বৈত বলে। এই বিশেষ ধর্মটিকে দ্বৈততানীতি (Principle of Duality) বলে।

উদাহরণ

1. যদি $A \subseteq B$ তাহলে দেখাও যে (i) $A \cap B' = \phi$,
(ii) $A' \cup B = U$

(i) B' সেট B সেটের পূরক। B'-এর সকল পদ সার্বিক সেট U-তে আছে কিন্তু B-তে নেই। আবার $A \subseteq B$, অতএব B' ও A সেট দুইটির মধ্যে কোন সাধারণ পদ নেই।

$\therefore$ A ও B' সেট দুইটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন অর্থাৎ $A \cap B' = \phi$

(ii) (i) থেকে পাই $A \cap B' = \phi$

$\therefore$ $(A \cap B')' = \phi'$ (যেহেতু $A = B$ থেকে পাই $A' = B'$)

$A' \cup (B')' = \phi'$ (ডি-মরগানের সূত্রানুসারে)

$A' \cup B = U$ (যেহেতু $(B')' = B$ এবং $\phi' = U$)

2. (*a*) যদি $A, B \subset U$ এবং $A \subseteq B$ তাহলে দেখাও যে,

(*a*) (i) $A \subseteq B \cap C$ (ii) $A \subseteq B \cup C$ (iii) $B' \subseteq A'$

(*b*) যদি $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $C \subseteq A$ তাহলে দেখাও যে $A = B = C$

(*c*) যদি $B' \subseteq A$ তাহলে দেখাও যে $A \subseteq B'$

(*a*) (i) ধর $x \in A$, অতএব $x \in B$ (যেহেতু $A \subseteq B$).

আবার $A \subseteq C$ সুতরাং $x \in A$ থেকে পাই $x \in C$.

$\therefore$ যদি $x \in A$ তাহলে $x \in B$ এবং $x \in C$

$\therefore$ যদি $x \in A$ তাহলে $x \in B \cap C$

অতএব $A \subseteq B \cap C$

(ii) $A \subseteq B$, $B \subseteq B \cup C$

$\therefore$ উপসেটের ধর্ম থেকে পাই $A \subseteq B \cup C$

(iii) ধর $y \in B'$

$\therefore \quad y \notin B$

আবার $A \subseteq B$ অতএব $y \notin A$

$\therefore \quad y \in A'$

অতএব যদি $y \in B'$ তাহলে $y \in A'$

$\therefore \quad B' \subseteq A'$

(*b*) $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq C$

$\therefore \quad A \subseteq C$

আবার $C \subseteq A$

$\therefore \quad A = C$

এভাবে দেখান যায় যে $C = B$

$\therefore \quad A = B = C.$

(*c*) $B' \subseteq A$

$\therefore \quad (B')' \supseteq A'$ অর্থাৎ $B \supseteq A'$

[উপসেটের এই সূত্রগুলির বহুল প্রয়োগ তর্কবিদ্যায় দেখা যায়। এই সূত্রগুলির সাহায্যে তর্কবিদ্যার বহু প্রশ্নের সমাধান সম্ভব।]

3. উপসেটের সূত্র বা ভেনচিত্রের সাহায্যে নীচের বিবৃতিগুলি থেকে যে **মুখ্য সিদ্ধান্তে** উপনীত হওয়া যায় তা স্থির কর :

(*a*) (i) সক্রেটিস্ একজন মানুষ,

(ii) সকল মানুষই নশ্বর

** *b*) (i) আমার রান্না করার আসবাবগুলি শুধু টিনের তৈরী,

(ii) তোমার দেওয়া উপহার সামগ্রী বিশেষ প্রয়োজনীয়,

(iii) রান্না করার কোন আসবাবই আমার প্রয়োজনে লাগে না।

*(*c*) (i) সব ছাত্ররা সৎ,

(ii) কোন রাজনৈতিক নেতা সৎ নয়।

*(*d*) (i) সকল শিশুই অবোধ,

**(*b*), (*c*), (*d*), (*e*), (*f*) প্রশ্নগুলি লুই ক্যারলের (Lewis Caroll) Symbolic Logic পুস্তক হতে নেওয়া হয়েছে।

*সকল বক্তব্যগুলি ব্যবহার করে যে সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় তাকে মুখ্য সিদ্ধান্ত বলা হয়েছে।

(ii) যারা কুমীরকে বশ মানাতে পারে তাদের কেউ গালমন্দ করে না,

(iii) যারা অবোধ তাদের সকলে গালমন্দ করে।

*(e) (i) কোন অভিজ্ঞ ব্যক্তি অযোগ্য নয়,

(ii) অশোক সব সময় ভুল করে,

(iii) কোন যোগ্য ব্যক্তি সব সময় ভুল করে না।

*(f) (i) সুশিক্ষিত ব্যক্তি ছাড়া কেউ খবরের কাগজ পড়ে না,

(ii) কোন অসামাজিক ব্যক্তির আক্ষরিক জ্ঞান নেই,

(iii) যাদের আক্ষরিক জ্ঞান নেই তারা সুশিক্ষিত নয়।

উত্তর ঃ (*a*)

ধর U=জীবিত প্রাণীদের সেট,

A=সকল মানুষের সেট

B=মরণশীল বস্তুর সেট

C=সক্রেটিসকে নিয়ে গঠিত একপদী সেট।

প্রশ্নানুসারে পাই,

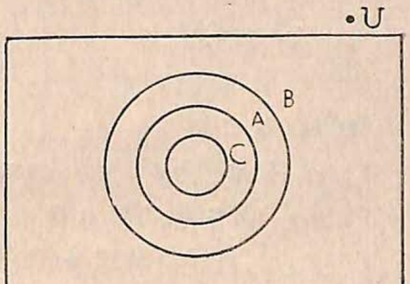
$C \subset A, A \subset B$

$\therefore C \subset B$

অর্থাৎ সক্রেটিস নশ্বর।

অতএব বক্তব্যগুলি থেকে মূখ্য সিদ্ধান্ত হল :

'সক্রেটিস নশ্বর।'



ভেন চিত্র

(*b*) ধর U=আমার সকল দ্রব্য সামগ্রীর সেট,

A=টিনের তৈরী দ্রব্য সামগ্রীর সেট,

B=রান্না করার আসবাব পত্র,

C=প্রয়োজনীয় দ্রব্য-সামগ্রী।

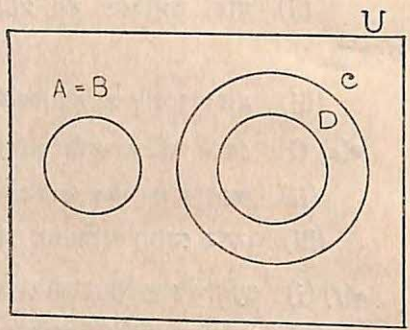
D=তোমার দেওয়া উপহার সামগ্রী।

(i) থেকে পাই $A=B$

(ii) থেকে পাই $D \subseteq C$

(iii) থেকে পাই

$B \cap C=\phi$



যেহেতু $D \subseteq C$

$\therefore$ $B \cap D \subseteq B \cap C$

$\therefore$ $B \cap D \subseteq \phi$

$\therefore$ $B \cap D=\phi$

অতএব $A \cap D=\phi$ (যেহেতু $A=B$)

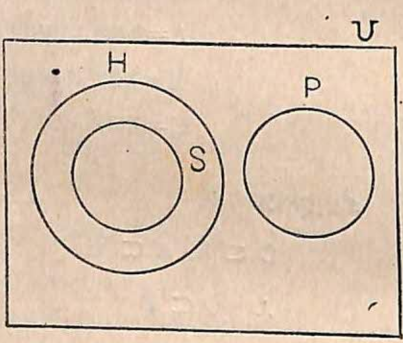
$\therefore$ 'তোমার দেওয়া উপহার সামগ্রীর কোনটিই টিনের তৈরী নয়' সিদ্ধান্তটি বক্তব্যগুলির মুখ্য সিদ্ধান্ত।

(c) U=সকল ব্যক্তির সেট

S=সকল ছাত্রের সেট

H=সকল সৎ ব্যক্তির সেট

P=রাজনৈতিক নেতাদের সেট



এখানে $S \subset H$

$H \cap P=\phi$

$\therefore$ $S \cap P \subseteq H \cap P$

$S \cap P \subseteq \phi$

$\therefore$ $S \cap P=\phi$

$\therefore$ কোন ছাত্রই রাজনৈতিক নেতা নয়।

(d) U=সকল মানুষের সেট

A=শিশুদের সেট

B=অবোধ ব্যক্তিদের সেট

C=কুমীরকে বশ মানাতে পারে এমন ব্যক্তিদের সেট

D=সেই সব ব্যক্তিদের সেট যাদের লোকে গালমন্দ করে

(i) থেকে পাই $A \subset B$

(ii) থেকে পাই $C \subset D'$

(iii) থেকে পাই $B \subset D$

$C \subset D'$ থেকে পাই

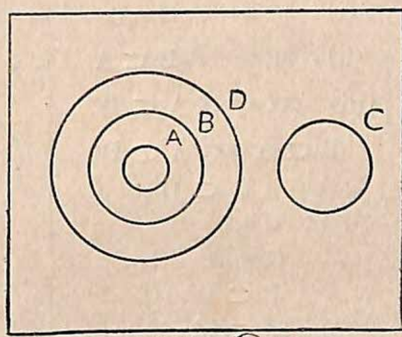
$C' \supset (D')' = D$

$C' \supset D$

$\therefore$ $A \subset B$,

$B \subset D$ এবং $D \subset C$

$\therefore$ $A \subset C'$



ভেন চিত্র

সুতরাং বক্তব্যগুলি হতে প্রধান বা মুখ্য সিদ্ধান্ত হবে : শিশুরা কুমীরকে বশ মানাতে পারে না।

(e) U = সকল ব্যক্তিদের সেট,

A = সব সময় ভুল করে এমন ব্যক্তিদের সেট,

B = যোগ্য ব্যক্তিদের সেট,

C = অভিজ্ঞ ব্যক্তিদের সেট,

D = অশোককে নিয়ে গঠিত সেট।

(i) থেকে পাই

$C \cap B' = \phi$

(ii) থেকে পাই $D \subset A$

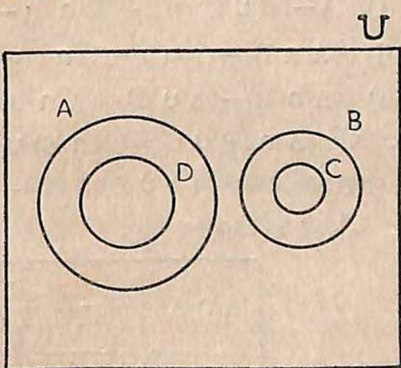
(iii) থেকে পাই

$B \cap A = \phi$

যেহেতু $B \cap A = \phi$,

উদাহরণ 1 থেকে পাই

$A \subset B'$



$\therefore$ $D \subset A$ এবং $A \subset B'$

সুতরাং $D \subset B'$

অর্থাৎ 'অশোক অযোগ্য ব্যক্তি।'

(f) এখানে U = সকল ব্যক্তিদের সেট, A = আক্ষরিক জ্ঞান শূন্য ব্যক্তিদের সেট, B = অসামাজিক ব্যক্তিদের সেট, C = খবরের কাগজ পড়ে এমন ব্যক্তিদের সেট, D = সুশিক্ষিত ব্যক্তিদের সেট।

(i) থেকে পাই $C=D$

(ii) থেকে পাই $B \subset A$

(iii) থেকে পাই $A \subset D'$

$B \subset A$ এবং $A \subset D'$

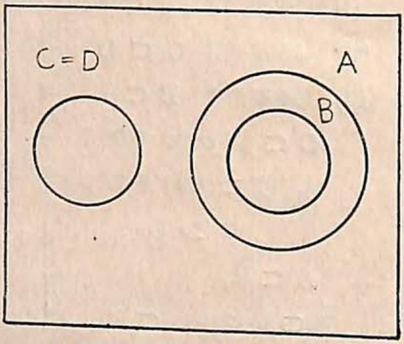
$B \subset D'$

আবার $C=D$,

$\therefore\ C'=D'$

$\therefore\ B \subset D'=C'$

$B \subset C'$



অর্থাৎ আসামাজিক ব্যক্তিরা খবরের কাগজ পড়ে না।

প্রশ্নমালা 1e

1. সেট সূত্রগুলির সাহায্যে নীচের সেটগুলি সরল কর :

(a) $A \cap (A \cap B)$, (b) $A \cap (A' \cup B)$,

(c) $(A \cap B) \cup (A \cap B')$

2. দেখাও যে $A-B=A \cap B'$

3. দেখাও যে

(i) $A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$

(ii) $(A \cap B)-C=(A-C) \cap (B-C)$

(iii) $(A \cap B)-(A \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cup B)'$

4. যদি $A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$ তাহলে পূরক সূত্রগুলির সাহায্যে দেখাও যে $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$

5. নীচের ছকটি পূরণ কর :

$A \cap A$	$A-B$	$B-A$
ϕ	$\neq\phi$	$\neq\phi$
$\neq\phi$		ϕ
$\neq\phi$		$\neq\phi$

6. যদি $A \cup B = A$ তাহলে দেখাও যে $B \subseteq A$

7. যদি $(A-B) \cup (B-A) = A \cup B$ তাহলে দেখাও যে $A \cap B = \phi$.

8. দেখাও যে (i) $(A \cup B) \cap (C' \cup D)$

$$= (A \cap C') \cup (B \cap C') \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$$

(ii) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (B \cup C] \cup B = B$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

বুলিয় এ্যালজেব্রা (Boolean Algebra)

2.1. প্রথম অধ্যায়ে সেট, উপসেট এবং তাদের নানা ধর্মের কথা আলোচিত হয়েছে। এ ছাড়া সার্বিক সেট U-এর সকল উপসেট-এর উপর যোগ, ছেদ ও পূরক প্রয়োগ করলে যে সব নিয়ম বা সূত্র সিদ্ধ হয় সেগুলি তালিকা আকারে দেখানো হয়েছে। বিনিময় সূত্র (Commutative laws), সংযোগ সূত্র (Associative laws), বিচ্ছেদ সূত্র (Distributive laws), ইডিম্‌পোটেন্ট সূত্র (Idempotent laws), বিশোষন সূত্র (Absorption laws), ডি-মরগানের সূত্র (De-morgan's law) ইত্যাদি অনেকগুলি সূত্র যে সেটের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য তা বিশদভাবে আলোচিত হয়েছে।

একটি সেট যদি এক বা একাধিক প্রক্রিয়া সাপেক্ষে যদি কয়েকটি নিয়ম বা সূত্র মেনে চলে তাহলে সেই বিশেষ ধরনের সেট একটি বিশেষ গাণিতিক কাঠামো (Mathematical Structure) গঠন করেছে বলা হয় অথবা সেটটি এই প্রক্রিয়াগুলি সাপেক্ষে একটি **এ্যালজেব্রা** গঠন করেছে বলা হয়। এই অধ্যায়ে একটি বিশেষ ধরনের এ্যালজেব্রার কথা আলোচিত হবে। এই এ্যালজেব্রার নাম বুলিয় এ্যালজেব্রা (Boolean Algebra).

বুলিয় এ্যালজেব্রা আলোচনার পূর্বে আমরা দুটি উদাহরণের সাহায্যে 'প্রক্রিয়া' ও বিভিন্ন সূত্র বা নিয়মগুলির একটু বিশদ আলোচনা করব।

উদাহরণ 1. ধরা যাক I-সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট। I-এর পদগুলির উপর দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া 'পাটীগাণিতিক যোগ' (Arithmetical Addition), 'পাটীগাণিতিক গুণ' (Arithmetical Multiplication) সহজেই আরোপ করা সম্ভব।

(i) যেহেতু দুটি পূর্ণ সংখ্যার যোগফল একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং গুণফল ও একটি পূর্ণসংখ্যা সুতরাং I সেটটি 'যোগ' ও 'গুণ' সাপেক্ষ বদ্ধ (Closed).

(ii) যদি $a, b, c \in I$ তাহলে নিম্নলিখিত নিয়মগুলি Iতে সিদ্ধ হয়

(a) বিনিময় সূত্র : $a+b=b+a$

$$a \cdot b=b \cdot a$$

প্রথমটি '+, সাপেক্ষে বিনিময় সূত্র এবং দ্বিতীয়টি (·) সাপেক্ষে বিনিময় সূত্র।

(*b*) সংযোগ সূত্র : $a+(b+c)=(a+b)+c$ (যোগ সাপেক্ষে)

$a(b \,.\, c)=(a \,.\, b) \,.\, c$ (গুণ সাপেক্ষে)

(*c*) বিচ্ছেদ সূত্র : $a \,.\, (b+c)=a \,.\, b+a \,.\, c$

এই সূত্রটিকে প্রথম বিচ্ছেদ সূত্র বলবো এবং যে কোন পূর্ণসংখ্যা a, b, c-এর জন্য এই সূত্রটি সিদ্ধ। এছাড়া আর একটি বিচ্ছেদ সূত্রের কথা তোমরা সেটে জেনেছো যেমন, $a+b \,.\, c=(a+b) \,.\, (a+c)$ কিন্তু এই দ্বিতীয় বিচ্ছেদ সূত্রটি পূর্ণসংখ্যার ক্ষেত্রে সিদ্ধ নয়। যেমন $2+3 \cdot 7 \neq (2+3) \,.\, (2+7)$.

(*d*) এছাড়া Iতে দুটি বিশেষ ধরনের পদ 0 এবং 1 পাওয়া সম্ভব যাদের জন্য

$$a+0=0+a=a.$$

$$a \,.\, 1=1 \,.\, a=a.$$

0কে '+' সাপেক্ষে I-এর একক পদ (Identity Element) বা শূন্য পদ (Null Element) বলা হয় এবং 1কে '.' সাপেক্ষে I-এর একক পদ বলা হয়।

এ ছাড়া আরও অনেকগুলি সূত্র বা নিয়ম আছে **যারা সেটের ক্ষেত্রে সিদ্ধ হয়** কিন্তু **I তে সিদ্ধ হয় না**। এ ধরনের সূত্রগুলির বিশদ আলোচনা প্রথম অধ্যায়ে করা হয়েছে।

উদাহরণ 2. ধর $A=\{a, b\}$ এবং P(A) সেট A সেটের পাওয়ার সেট অর্থাৎ $P(A)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

[লক্ষ্য কর যে P(A) সেটের পদগুলি এক একটি সেট].

P(A) সেটের উপর দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '∪', '∩' আরোপ করা সম্ভব এবং এই দুটি প্রক্রিয়া সাপেক্ষে P(A) সেটটি বদ্ধ। এছাড়া P(A) সেটে নিম্নলিখিত নিয়ম বা সূত্রগুলি সিদ্ধ।

(*a*) $\{a\} \cup \{b\}=\{b\} \cup \{a\}=\{a, b\}$	$\{a\} \cap \{b\}=\{b\} \cap \{a\}=\phi$
$\{b\} \cup \phi=\phi \cup \{b\}=\{b\}$	$\{b\} \cap \phi=\phi \cap \{b\}=\phi$
$\{a\} \cup \{a, b\}=\{a, b\} \cup \{a\}$ $=\{a, b\}$	$\{a\} \cap \{a. b\}=\}a, b\{ \cap \{a\}=\{a\}$
ইত্যাদি	ইত্যাদি

সুতরাং যদি x ও y P(A) সেটের যে কোন দুটি পদ হয় তাহলে

$$x \cup y = y \cup x$$

$$x \cap y = y \cap x$$

অর্থাৎ বিনিময় সূত্রটি '∪' ও '∩' সাপেক্ষে P(A) সেটে সিদ্ধ।

(b) আবার $\{a\} \cup (\{b\} \cup \{a, b\}) = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$ এবং
$(\{a\} \cup \{b\}) \cup \}a, b\} = \{a, b\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$

$$\therefore \{a\} \cup (\{b\} \cup \{a, b\}) = (\{a\} \cup \{b\}) \cup \{a, b\}$$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে

$$\{b\} \cup (\{a\} \cup \{a, b\}) = (\{b\} \cup \{a\}) \cup \{a, b\} \text{ ইত্যাদি}$$

$\therefore$ যদি $x, y, z \in P(A)$ তাহলে $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$.
অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$.
অর্থাৎ দুটি সংযোগ সূত্রই P(A)তে সিদ্ধ।

(c) $\{a\} \cup (\{b\} \cap \{a\ b\}) = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
এবং $(\{a\} \cup \{t\}) \cap (\{a\} \cup \{a, b\}) = \{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$

$$\therefore \{a\} \cup (\{b\} \cap \{a, b\}) = (\{a\} \cup \{b\}) \cap (\{a\} \cup \}a, b\})$$

এভাবে দেখানো যায় যে $\{a\} \cup (\{a\} \cap \{b\})$

$$= (\{a\} \cup \{a\}) \cap (\{a\} \cup \{b\}$$

অর্থাৎ $x \cup (y \cap x) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$; $x, y, z \in P(A)$.
অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$,
সুতরাং দুটি বিচ্ছেদ সূত্রই P(A)তে সিদ্ধ।

(d)

$\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$	$\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$
$\{b\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$	$\{b\} \cap \{a, b\} = \{b\}$
$\phi \cup \{a, b\} = \{a, b\}$	$\phi \cap \{a, b\} = \phi$
$\{a, b\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$	$\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$

$\phi \cup \{a\} = \{a\}$	$\phi \cap \{a\} = \phi$
$\phi \cup \{b\} = \{b\}$	$\phi \cap \{b\} = \phi$
$\phi \cup \{a, b\} = \{a, b\}$	$\phi \cap \{a, b\} = \phi$
$\phi \cup \phi = \phi$	$\phi \cap \phi = \phi$

উপরের তথ্যগুলি হতে দেখা যায় যে যদি $x \in P(A)$ তাহলে

$$x \cup A = A \cup x = A \qquad x \cup \phi = \phi \cup x = x$$
$$x \cap A = A \cap x = x \qquad x \cap \phi = \phi \cap x = \phi$$

সুতরাং '∩' সাপেক্ষে $A = \{a, b\}$ পদটি P(A) সেটের একক পদ এবং '∪' সাপেক্ষে $\phi = \{\quad\}$ পদটি P(A) সেটের একক পদ।

(e) '∪' ও '∩' এই দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া ছাড়া আর একটি একপদী প্রক্রিয়া (Unary operation) পূরণ (′) P(A)তে আরোপ করা সম্ভব। (′) প্রক্রিয়া সাপেক্ষে P(A) সেটটি বদ্ধ কেননা $\{a\}' = \{b\} \in P(A)$; $\{b\}' = \{a\} \in P(A)$; $\phi' = A = \{a, b\} \in P(A)$; $A' = \phi \in P(A)$.

লক্ষ্য কর প্রথম উদাহরণে এ ধরনের একপদী প্রক্রিয়া আরোপ করা সম্ভব হয় নি। পূরক সম্পর্কিত কয়েকটি সূত্র P(A)তে সিদ্ধ হয় যেমন :

(i) $\{a\} \cup \{a\}' = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} = A$
$\{b\} \cup \{b\}' = \{b\} \cup \{a\} = \{a, b\} = A$
$\phi \cup \phi' = \phi \cup A = A$
$A \cup A' = A \cup \phi = A$

অর্থাৎ $x \cup x' = A = x' \cup x$, $x \in P(A)$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে $x \cap x' = \phi = x' \cap x$.

যেহেতু এক্ষেত্রে পদ x একটি সেট সুতরাং x' দ্বারা x-এর (A সেটে সাপেক্ষে) পূরককে সূচিত করা হয়েছে।

(ii) $(\{a\}')' = \{b\}' = \{a\}$, $(\{b\}')' = \{a\}' = \{b\}$,
$(\phi')' = (A)' = \phi$, $(A')' = (\phi)' = A$

অর্থাৎ যে কোন পদ x এর জন্য $\boxed{(x')' = x}$

(iii) $(\{a\} \cup \{b\}' = \{a, b\}' = \phi$; $\{a\}' \cap \{b\}' = \{b\} \cap \{a\} = \phi$
$\therefore \quad (\{a\} \cup \{b\})' = \{a\}' \cap \{b\}' \; (= \phi)$

অনুরূপভাবে, $(\{a\} \cup \phi)' = \{a\}' \cap \phi' \; (= \{b\})$
$(\{b\} \cup \{a, b\})' = \{b\}' \cap \{a, b\}' \; (= \phi)$ ইত্যাদি

সুতরাং $\boxed{(x \cup y)' = x' \cup y'}$; $x, y \in P(A)$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে $\boxed{(x \cap y)' = x' \cup y'}$

অতএব ডি-মরগানের সূত্র দুটি P(A)তে সিদ্ধ।

এভাবে দেখানো যায় যে P(A) সেটের যে কোন পদ x ও y-এর জন্য

$x \cup x = x$ $x \cap x = x$	এবং	$x \cup (x \cap y) = x$ $x \cap (x \cup y) = x$

সূত্রগুলি সিদ্ধ।

এই দুটি উদাহরণ হতে বলা যায় যে I ও P(A) সেট দুটিতে অনেকগুলি নিয়ম সিদ্ধ হয়। I সেটে দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া আরোপ করা সম্ভব এবং তৎসম্পর্কিত কয়েকটি সূত্র Iতে সিদ্ধ অপর পক্ষে P(A) সেট দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া ও একটি একপদী প্রক্রিয়া আরোপ করা সম্ভব এবং P(A) সেটে সার্বিক সেট U-এর উপসেট সমূহ যে সকল নিয়ম মেনে চলে তার সব কটিই সিদ্ধ হয়। সুতরাং I ও P(A) এর উপর দুটি গাণিতিক কাঠামো গঠন করা সম্ভব। এখন একটি বিশেষ গাণিতিক কাঠামোর কথা আলোচনা করবো যার নাম হল বুলিয় অ্যালজেব্রা। বিশ্ববিখ্যাত গাণিতিক ও দার্শনিক জর্জ বুল (George Boole) এই এ্যালজেব্রার স্রষ্টিকর্তা এবং এঁর নামানুসারে এই অ্যালজেব্রার নামকরণ হয়েছে বুলিয় অ্যালজেব্রা।

উদাহরণ 2 থেকে দেখা যায় যে, P(A) সেটে দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া (∪, ∩) এবং একটি একপদী প্রক্রিয়া '.' পূরক সাপেক্ষে অনেকগুলি সূত্র সিদ্ধ হয়। এই সূত্রগুলির বেশ কয়েকটি বাকি সূত্রগুলি থেকে প্রমাণ করা সম্ভব। সব চেয়ে কম কয়টি সূত্র সিদ্ধ হলে বাকি সূত্রগুলিও সিদ্ধ হয় তার একটি তালিকা সর্ব প্রথম আমেরিকান গণিতজ্ঞ ই. ভি. হানটিংটন্ (E. V. Huntington) 1904 খৃস্টাব্দে তাঁর গবেষণা প্রবন্ধ 'Postulates for the Algebra of Logic'-এ লিপিবদ্ধ করেন। হানটিংটন যে কয়েকটি সূত্রের কথা বলেছেন সেগুলি যদি কোন সেট [যাতে দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+' ও (·) ও একটি একপদী প্রক্রিয়া (′) আরোপ করা সম্ভব] সিদ্ধ হয় তাহলে সেই সেটটিকে বুলিয় অ্যালজেব্রা বলা হয়।

বর্তমানে হানটিংটন প্রদত্ত সংজ্ঞাই বুলিয় অ্যালজেব্রার সংজ্ঞারূপে গ্রহণ করা হয়। পরের অনুচ্ছেদে আমরা বুলিয় অ্যালজেব্রার সংজ্ঞা ও তার বিভিন্ন ধর্ম নিয়ে আলোচনা করবো।

2·2. বুলিয় অ্যালজেব্রা

সংজ্ঞা ঃ ধরা যাক B এমন একটি সেট যার পদগুলির উপর দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া 'যোগ' '+' ও গুণ (.) এবং একটি একপদী প্রক্রিয়া 'পূরণ' (´) আরোপ করা সম্ভব, তাহলে Bকে একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা বলা হবে যদি নিম্নোক্ত সব কটি শর্ত সিদ্ধ হয়—

শর্ত 1 বা P_1 ঃ B-এর যে কোন দুটি পদ a ও b-এর জন্য

$$a+b=b+a$$

এবং $a . b=a . b$

[অর্থাৎ '+' ও '.' সাপেক্ষে বিনিময় নিয়মটি সিদ্ধ।]

শর্ত 2 বা P_2 ঃ Bতে '+' '.' সাপেক্ষে দুটি ভিন্ন একক পদ যথাক্রমে $\underline{0}$ এবং $\underline{1}$ থাকবে যাতে যে কোন পদ 'a' এর জন্য

$$a+\underline{0}=\underline{0}+a=a$$

এবং $a . \underline{1}=\underline{1} . a=a$

শর্ত 3 বা P_3 ঃ B-এর যে কোন তিনটি পদ a, b, c-এর জন্য

$$a . (b+c)=a . b+a . c$$

এবং $a+(b . c)=(a+b) . (a+c)$

[অর্থাৎ দুটি বিচ্ছেদ সূত্রই সিদ্ধ]

শর্ত 4 বা P_4 ঃ B-এর যে কোন পদ 'a'-এর জন্য Bতেই একটি পদ a' থাকবে যেন

$$a+a'=\underline{1}$$

এবং $a . a'=\underline{0}$ হয়।

[a'কে a পদের পূরক বলা হয়]

দ্রষ্টব্য ঃ (1) '+' ও '.' চিহ্ন দ্বারা যে কোন দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়ার কথা বলা হয়েছে। এরা পাটিগানিতিক যোগ ও গুণ থেকে ভিন্ন।

(2) যদি B সেটে দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+' ও '.' এবং একপদী প্রক্রিয়া ' ' ' আরোপ করা সম্ভব হয় এবং P_1, P_2, P_3, P_4 শর্ত চারটি যদি B সেটের সকল পদের জন্য সিদ্ধ হয় তাহলে B সেটটি উপরোক্ত তিনটি প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা গঠন করে। এই বুলিয় অ্যালজেব্রাকে

সাধারণত (B; +, ., ') লিখে প্রকাশ করা হয়। প্রথম বন্ধনীর মধ্যে প্রথমে সেট, তারপর দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া এবং একটি একপদী প্রক্রিয়া লেখা হয়।

(3) a ও b যদি (B ; +, ., ') বুলিয় অ্যালজেব্রার যে কোন দুটি পদ হয় তাহলে $a+b$ ও $a \,.\, b$ যথাক্রমে a এবং b-এর যোগ ও গুণ বলা হবে এবং a' পদকে a পদের পূরক বলা হবে।

(4) $\underline{0}$ পদকে বুলিয় অ্যালজেব্রা B-এর '+' সাপেক্ষে এককপদ (বা শূন্য পদ) বলা হয় এবং $\underline{1}$ পদকে বুলিয় অ্যালজেব্রা B-এর '(.)' সাপেক্ষে এককপদ বলা হয়। $\underline{0}$ এবং $\underline{1}$ বিশেষ পদ দুটি সংখ্যা 0 এবং সংখ্যা 1 হতে সম্পূর্ণ আলাদা।

(3) $a \,.\, b$ ও ab সমার্থক রূপে গণ্য করা হবে।

উদাহরণ 1. ধরা যাক B={0, 1}. দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+' এবং '.' ও একটি একপদী প্রক্রিয়া ' ' ' Bতে প্রয়োগ করলে যে পদগুলি পাওয়া যায় তা নিচের সারণি (Table) গুলি দ্বারা দেখানো হল। দেখাও যে B একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

'+'	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

	'
0	1
1	0

অর্থাৎ $0+0=0,$ অর্থাৎ $0 \cdot 0=0,$ অর্থাৎ $0'=1$

$0+1=1$ $\quad 0 \cdot 1=1$ $\quad 1'=0$

$0+0=1,$ $\quad 1 \cdot 0=0,$

$1+1=1$ $\quad 1 \cdot 1=1$

যেহেতু $0+0=0=0+0$ $\quad 0 \cdot 0=0=0 \cdot 0$

$0+1=1=1+0$ $\quad 0 \cdot 1=0=1 \cdot 0$

$1+1=1=1+1$ $\quad 1 \cdot 1=1=1 \cdot 1$

অতএব P_1 সর্তটি ($a+b=b+a$ এবং $a \cdot b=b \cdot a$)

B সেটের পদগুলির জন্য সিদ্ধ।

আবার $0 \cdot (0+0)=0 \cdot 0=0,\; 0 \cdot 0+0 \cdot 0=0+0=0$

$\therefore \quad 0 \cdot (0+0)=0 \cdot 0+0 \cdot 0$

অনুরূপে $0\cdot(0+1)=0=0\cdot0+0\cdot1$

$0\cdot(1+0)=0=0\cdot1+0\cdot0$

$0\cdot(1+1)=0=0\cdot1+0\cdot1$

$1\cdot(0+0)=0=1\cdot0+1\cdot0$

$1\cdot(0+1)=1=1\cdot0+1\cdot1$

$1\cdot(1+0)=1=1\cdot1+1\cdot0$

$1\cdot(1+1)=1=1\cdot1+1\cdot1$

$\therefore$ B-এর সব পদগুলির জন্য $a\,.\,(b+c)=a\,.\,b+a\,.\,c$ সূত্রটি সিদ্ধ।

এভাবে বলা যায় যে $a+(b\,.\,c)=(a+b)\,.\,(a+c)$ সূত্রটি B-এর সব পদগুলির জন্য সিদ্ধ। অর্থাৎ B-এর সব পদগুলি P_3 শর্তটি পূরণ করে।

যেহেতু $0+0=0$ এবং $1\cdot0=0$

$0+1=1$ $\quad 1\cdot1=1$

$\therefore$ $\underline{0}$ এবং 1 পদ দুটি যথাক্রমে '+' ও '.' সাপেক্ষে B-এর একক পদ। সুতরাং P_2 শর্তটি সিদ্ধ। এক্ষেত্রে $\underline{0}=0$ এবং $\underline{1}=1$

আবার পূরক-এর টেবল থেকে পাই $0'=1$ ও $1'=0$, সুতরাং

$$0+0'=0+1=1,\ 1+1'=1+0=1$$

$$0\cdot0'=0\cdot1=0,\ 1\cdot1'=1\cdot0=0$$

$\therefore$ B-এর যে কোন পদ a'র জন্য $a+a'=1$

$$a\,.\,a'=0$$

$\therefore$ P_4 শর্তটিও সিদ্ধ হ'ল।

সুতরাং B সেটটি '+', '.' ও '′' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা। অর্থাৎ (B, +, ., 1) একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

উদাহরণ 2. $B=\{A, \phi\}$. **B** সেটের পদ দুটি এক একটি সেট এবং **A** শূন্য সেট নয় (অর্থাৎ $A\neq\phi$). '∪', '∩' এবং '.' এই প্রক্রিয়াগুলি **B** সেটে প্রযোজ্য। যদি '∪'-এর পরিবর্তে '+'; '∩'-এর পরিবর্তে '.' বসানো হয় তাহলে সেটের যোগ, ছেদ ও পূরক-এর সংজ্ঞানুসারে পাই

+	A	ϕ
A	A	A
ϕ	A	ϕ

.	A	ϕ
A	A	ϕ
ϕ	ϕ	ϕ

′	
A	ϕ
ϕ	A

টেবল্ থেকে দেখা যাচ্ছে যে P_1 শর্তটি B সেটে সিদ্ধ।

আবার $A+(A\,.\,\phi)=A+\phi=A$; $(A+A)\,.\,(A+\phi)=A\,.\,A=A$

$\therefore\ A+A\,.\,\phi=(A+A)\,.\,(A+\phi)$

অনুরূপে $A\,.\,(A+\phi)=A\,.\,A=\phi$; $A\,.\,A+A\,.\,\phi=\phi+\phi=\phi$

$\therefore\ A\,.\,(A+\phi)=A\,.\,A+A\,.\,\phi$

এইভাবে দেখানো যায় যে $\left.\begin{array}{l} a+b\,.\,c=(a+b)\,.\,(a+c) \\ \text{এবং } a\,.\,(b+c)=a\,.\,b+a\,.\,c \end{array}\right\}\ a, b, c \in B$

অর্থাৎ P_3 শর্তটি Bতে সিদ্ধ।

যেহেতু $A+\phi=A=\phi+A$, $A+A=A$

$A\,.\,\phi=\phi\,.\,A=\phi$

$\therefore$ ϕ পদটি '+' সাপেক্ষে B-এর এককপদ অর্থাৎ $0=\phi$

A পদটি '.' সাপেক্ষে B-এর একক পদ অর্থাৎ $1=A$

সুতরাং P_3 শর্তটিও Bতে সিদ্ধ। পূরকের টেবল্ থেকে দেখা যাচ্ছে

$A'=\phi$, $\phi'=A$

$\therefore\ A+A'=A+\phi=A \qquad A\,.\,A'=A\,.\,\phi=\phi$

$\phi+\phi'=\phi+A=A \qquad \phi\,.\,\phi'=\phi\,.\,A=\phi$

অতএব P_4 শর্তটি Bতে সিদ্ধ। সুতরাং $B=\{A, \phi\}$ সেটটি একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

উদাহরণ 3. $A=\{a, b, c\}$, $P(A)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$. P(A) সেট A সেটের পাওয়ার সেট (Power set). দেখাও যে P(A) সেটটি একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

I. '∪' ও '∩' দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া P(A)-তে প্রযোজ্য '∪'-কে '+' ও '∪'-কে '.' ভাবা যেতে পারে। একপদী প্রক্রিয়া ' ′ '-কে সেটের পূরক প্রক্রিয়া ভাবা যেতে পারে। সুতরাং P(A) সেটে '+', '.', ' ′ ' প্রক্রিয়া তিনটি প্রযোজ্য।

II. যেহেতু P(A) সেটের পদগুলি এক একটি সেট এবং এরা A সেটের সকল উপসেট সুতরাং বিনিময় সূত্রটি P(A)-তে সিদ্ধ।

$\therefore\ \left.\begin{array}{l} a+b=b+a \\ a\,.\,b=b\,.\,a \end{array}\right\}\ a, b \in P(A)$

সুতরাং P_1 শর্তটি সিদ্ধ।

আবার দুটি বিচ্ছেদ সূত্র (Distributive laws) P(A)-তে সিদ্ধ। অর্থাৎ

$$x+(y\,.\,z)=(x+y)\,.\,(x+z)\;;\; x\,.\,(y+z)=xy+x\,.\,z\;;$$
$$x, y, z \in P(A)$$

অতএব P_3 শর্তটি সিদ্ধ।

$$\text{যেহেতু}\quad \left.\begin{aligned} x+\phi=\phi+x=x \\ x\,.\,A=x=A\,.\,x \end{aligned}\right\}\; x \in P(A)$$

অতএব ϕ পদটি '$\cup$' বা '+' সাপেক্ষে P(A) সেটের এককপদ এবং A পদটি P(A) সেটের '$\cap$' বা '.' সাপেক্ষে একক পদ।

$$\therefore\quad \underline{0}=\phi \qquad \text{এবং}\quad x+\underline{0}=x$$
$$\underline{1}=A \qquad\qquad x\,.\,\underline{1}=x$$

সুতরাং P_2 শর্তটি সিদ্ধ।

যেহেতু দুটি বিচ্ছেদ সূত্র

$$\left.\begin{aligned} x \cup (y \cap z)=(x \cup y) \cap (x \cup z) \text{ বা } x+y\,.\,z=(x+y)\,.\,(x+z) \\ x \cap (y \cup z)=(x \cap y) \cup (x \cap z) \text{ বা } x\,.\,(y+z)=x.y+x.z \end{aligned}\right\}$$
$$x, y, z \in P(A).$$

সেটদের ক্ষেত্রে সিদ্ধ হয় সুতরাং P(A) সেটেও বিচ্ছেদ সূত্র দুটিও সিদ্ধ হবে।

অতএব P_3 শর্তটি সিদ্ধ।

যদি $x \in P(A)$ এবং x' দ্বারা A সেট সাপেক্ষে x-এর পূরক বোঝানো হয় তাহলে বলা যায় $\phi'=A, \{a\}'=\{b, c\}\;\; \{a, b\}'=\{c\}$

$$\{b\}'=\{c, a\}\;\; \{b, c\}'=\{a\}$$
$$\{c\}'=\{a, b\}\;\; \{c, a\}'=\{b\}$$

$$A'=\phi$$

$\therefore$ যদি $x \in P(A), x+x'=A,\; x\,.\,x'=\phi$

[যেমন $\{b, c\}+\{b, c\}'=\{b, c\}+\{a\}=\{a, b, c\}=A$

$\{b, c\}\,.\,\{b, c\}'=\{b, c\}\,.\,\{a\}=\phi$]

$\therefore\;\; P_4$ শর্তটিও P(A)-তে সিদ্ধ হয়।

সুতরাং P(A) সেটটি একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

উদাহরণ 4. যদি F(6)=6-এর সকল উৎপাদকের সেট হয় তাহলে দুটি উপযুক্ত দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+' ও '.' এবং একটি একপদী ' ' ' প্রয়োগ করে দেখাও যে F(6) সেটটি একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

6-এর উৎপাদকগুলি হ'ল 1, 2, 3, 6

$\therefore \quad F(6)=\{1, 2, 3, 6\}$

'+', '.' ও ' ' ' এই প্রক্রিয়াগুলির সংজ্ঞা এভাবে দেওয়া যায়।

যেমন (i) $a+b=a$ ও b-এর ল. সা. গু.

(ii) $a \, . \, b=a$ ও b-এর গ. সা. গু.

(iii) $a'=\frac{6}{a}$

'+' ও '.'-এর জন্য দুটি টেবল্ (table) এবং ' ' '-এর জন্য আর একটি টেবল্ পাওয়া যায়। এই তিনটি টেবল নিচে দেওয়া হল :

+	1	2	3	6	
1	1	2	3	6	→ প্রথম সারি (First row)
2	2	2	6	6	→ দ্বিতীয় সারি (Second row)
3	3	6	3	6	→ তৃতীয় সারি (Third row)
6	6	6	6	6	→ চতুর্থ সারি (Fourth row).
	↓	↓	↓	↓	
	প্রথম স্তম্ভ (First column)	দ্বিতীয় স্তম্ভ (Second column)	তৃতীয় স্তম্ভ (Third column)	চতুর্থ স্তম্ভ (Fourth column)	

টেবল্—1

.	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	1	3
6	1	2	3	6

টেবল্—2

′	
1	6
2	3
3	2
6	1

টেবল্—3

I. যেহেতু a ও b-এর ল. সা. গু.$=b$ ও a-এর ল সা. গু.

a ও b-এর গ. সা. গু.$=b$ ও a-এর গ. সা. গু.

$\therefore \quad a+b=b+a, \qquad a, b \in F(6)$

$a \, . \, b=b \, . \, a$

টেবল্-1 হতেও দেখা যায় যে F(6)-এর যে-কোন দুটি পদ a ও b-এর জন্য $a+b=b+a$

টেবল্-2 হতেও দেখা যায় যে, F(6)-এর যে-কোন দুইটি পদ a ও b-এর জন্য $a\,.\,b=b\,.\,a$.

II. $a+1=a$ ও 1-এর ল. সা. গু. $=a=1$ ও a-এর ল. সা. গু. $=1+a$

$a\,.\,6=a$ ও 6-এর গ. সা. গু, $=6$ ও a-এর ল. সা. গু. $=6\,.\,a$

$\therefore\ a+1=a=1+a$

$a\,.\,6=a=6\,.\,a$

সুতরাং 1 এখানে '+' সাপেক্ষে F(6)-এর এককপদ $\underline{0}$

এবং 6 „ '.' „ F(6)-এর এককপদ $\underline{1}$

III. $6=1\,.\,2\,.\,3$. অতএব 6-এর মৌলিক উৎপাদকগুলি মধ্যে পুনরাবৃত্তি নেই।

$\therefore\ a'=\frac{6}{a}$

$a+a'=a$ এবং $\frac{6}{a}$-এর ল. সা. গু.

$=6$ ['.' সাপেক্ষে F(6)-এর এককপদ $=\underline{1}$]

$a\,.\,a'=a$ এবং $\frac{6}{a}$-এর গ. সা. গু.

$=1$ ['+' সাপেক্ষে F(6)-এর এককপদ $=\underline{0}$]

$\therefore\ a+a'=\underline{1}$

$a\,.\,a'=\underline{0}$

IV. $a\,.\,(b+c)=a$ ও $(b+c)$-এর গ. সা গু.

$=a$ ও (b ও c-এর ল. সা. গু.)-এর গ. সা. গু.

ধর $a=2$ $\quad\therefore\ b+c=6\quad b\,.\,c=3$ ও 6-এর গ. সা. গু. $=3$

$b=3\quad a\,.\,(b+c)=2$ ও 6 এর গ. সা. গু. $=2$.

$c=6\quad a+b\,.\,c=2$ ও 3-এর ল. সা. গু. $=6$

আবার $a\,.\,b=2$ ও 3-এর গ. সা. গু. $=1$

$a+b=2$ ও 3-এর ল, সা. গু. $=6$

$a\,.\,c=2$ ও 6-এর গ. সা. গু. $=2$

$a+c=2$ ও 6-এর ল. সা. গু. $=6$

$\therefore\ a\,.\,b+a\,.\,c=1$ ও 2-এর ল. সা. গু. $=2$

$\therefore\ (a+b).(a+c)=6$ ও 6-এর গ. সা. গু.$=6$

$\therefore\ a.(b+c)=a.b+a.c,\ a+b.c=(a+b).(a+c)$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে $a.(b+c)=a.b+a.c$

এবং $a+(b.c)=(a+b).(a+c)$

সূত্র দুটি F(6)-এর যে-কোন তিনটি পদ a, b, c-এর জন্য সিদ্ধ।

অতএব F(6)-তে বুলিয় অ্যালজেব্রার সব কটি সূত্রই সিদ্ধ হয়।

সুতরাং F(6) একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

$\therefore$ F(6) ; +, ., ′) একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

উদাহরণ 5. F(12)-এর সকল উৎপাদকের সেট$=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. দেখাও যে F(12) সেটটি বুলিয় অ্যালজেব্রা নয়।

পূর্বের উদাহরণের মত যদি $a+b=a$ ও b-এর ল. সা. গু.

$a.b=a$ ও b-এর গ. সা. গু.

$a'=\frac{12}{a}$

তাহলে সহজেই বলা যায় যে $\left.\begin{array}{l}a+b=b+a\\ a.b=b.a\end{array}\right\}a, b\in F(12)$

আবার $12=1.2.2$ অর্থাৎ 12-এর উৎপাদকরূপে 2-এর পুনরাবৃত্তি ঘটেছে।

$$2'=\frac{12}{2}=6$$

$\therefore\ 2+2'=2$ ও 6-এর ল. সা. গু.$=6$

কিন্তু এখানে $\underline{0}$ পদ$=1$

1 পদ$=12$

$\therefore\ 2+2'=6\neq12$

$8.2'=2$ ও 6-এর গ. সা. গু.$=2$

$2'$ যদি 2-এর পূরক হয় তাহলে

$2+2'=1$ হবে

এবং $2.2'=\underline{0}$

কিন্তু এক্ষেত্রে $2+2'\neq1$

$2:2'=\underline{0}.$

$\therefore$ F(12) সেটটি বুলিয় অ্যালজেব্রা হতে পারে না কেন না P_4 শর্তটি F(12)তে সিদ্ধ হয় না।

উদাহরণ 6. $B_4=\{0, 1, a, b\}$. B_4 সেটে দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+' ও '.' এবং একটি এক পদী প্রক্রিয়া '/' আরোপ করলে যে পদগুলি পাওয়া যাবে তা নিচের টেবলগুলিতে দেখান হল।

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	1	1	1
a	a	1	a	1
b	b	1	1	b

টেবল—1

.	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	a	0
b	0	b	0	b

টেবল—2

/	/
0	1
1	0
a	b
b	a

টেবল—3

প্রমাণ কর যে $(B_4\ ;\ +, ., ')$ একটী বুলিয় এ্যালজেব্রা।

I. উপরের টেবল্ 1 ও টেবল্ 2 হতে দেখা যায় যে B_4 সেটের যে-কোন দুটি পদের যোগ ও গুণ ঐ সেটের পদ। সুতরাং '+' ও '.' সাপেক্ষে B_4 সেটটি বদ্ধ।

টেবল্ 1 ও টেবল্ 2 থেকে বলা যায় যে

$$x+y=y+x$$
$$x\,.\,y=y\,.\,x$$

যদি $x, y \in B_4$. সুতরাং P_1 শর্তটি সিদ্ধ।

II. $\mathbf{0\,.\,(1+}a\mathbf{)=0\,.\,1}$ [টেবল্ 1 হতে বলা যায় যে $\mathbf{1}+a=\mathbf{1}$]
$\qquad\qquad =0$ [টেবল্ 2 হতে বলা যায় $\mathbf{0\,.\,1}=0$]

আবার $0\,.\,\mathbf{1}=0, 0\,.\,a=0.$ $\therefore$ $0\,.\,1+0.a=0+0=0$

সুতরাং $0\,.\,(1+a)=0\,.\,1+0\,.\,a=0$

উদাহরণ 6.

$$0+1\,.\,a=0+a \qquad (\because\ 1\,.\,a=1)$$
$$=a \qquad (\because\ 0+a=a)$$
$$(0+1)\,.\,(0+1)=1\,.\,a \qquad (\because\ 0+a=a)$$
$$=a$$

সুতরাং $0+1\,.\,a=a=(0+1)\,.\,(0+a)$.

এ ভাবে দেখান যায় যে B_4 সেটের যে কোন তিনটি পদ x, y, z-এর জন্য

$$x\,.\,(y+z)=x\,.\,y+x\,.\,z$$

এবং $x+y\,.\,z=(x+y)\,.\,(x+z)$

অতএব $\mathbf{P_2}$ শর্তটি B_4তে সিদ্ধ।

III. এবার দেখতে হবে B_4 সেটে '+' সাপেক্ষে একক পদ এবং '.' সাপেক্ষে একক পদ আছে কি না।

টেবল্ 1-এর প্রথম সারি থেকে দেখা যাচ্ছে যে

$$0+0=0$$
$$0+1=1$$
$$0+a=a$$
$$0+b=b$$

অতএব 0 পদটি B_4 সেটের '+' সাপেক্ষে একক পদ অর্থাৎ $\underline{0}=0$

টেবল্ 2-এর দ্বিতীয় সারি থেকে দেখা যাচ্ছে যে

$$1\,.\,0=0$$
$$1\,.\,1=1$$
$$1\,.\,a=a$$
$$1\,.\,b=b$$

অর্থাৎ $1\,.\,x=x$. যদি $x \in B_4$. সুতরাং 1 পদটি '.' সাপেক্ষে B_4-এর একক পদ। $\therefore\ \underline{1}=1$

অতএব P_3 শর্তটি B_4 সেটে সিদ্ধ।

IV. টেবল্ 3 থেকে বলা যায় যে $0'=1,\ 1'=0,\ a'=b,\ b'=a$

অতএব B_4 সেটের প্রতিটি পদের পূরক B_4 সেটেই আছে অর্থাৎ একপদী প্রক্রিয়া সাপেক্ষে B_4 সেটটি বদ্ধ।

আবার $0+0'=0+1=1=\underline{1}$ $\qquad 0\,.\,0'=0\,.\,1=0=\underline{0}$

$1+1'=1+0=1=\underline{1}$ $\qquad 1\,.\,1'=1\,.\,0=0=\underline{0}$

$a+a'=a+b=1=\underline{1}$ $\qquad a\,.\,a'=a\,.\,b=0=\underline{0}$

$b+b'=b+a=1=\underline{1}$ $\qquad b\,.\,b'+b\,.\,a=0=\underline{0}$

অর্থাৎ B_4 সেটের যে কোন পদ x-এর জন্য $x+x'=\underline{1}$

$$x\,.\,x'=\underline{0}$$

$\therefore$ P_4 শর্তটি B_4 সেটে সিদ্ধ।

P_1, P_2, P_3, P_4 শর্তগুলি B_4 সেটে সিদ্ধ।

অতএব '+', '.', ''' সাপেক্ষে B_4 একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

দ্রষ্টব্য :

(1) বুলিয় অ্যালজেব্রার সংজ্ঞা থেকে বলা যায় যে সার্বিক সেটের উপসেট সমূহ বুলিয় অ্যালজেব্রার সবকটি শর্ত মেনে চলে সুতরাং সেট সমূহের অ্যালজেব্রা একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

(2) 1নং উদাহরণে একটি বিশেষ ধরনের বুলিয় অ্যালজেব্রার কথা বলা হয়েছে যাতে মাত্র দুটি পদ 0 ও 1 আছে। এছাড়া 6নং উদাহরণে চারটি পদ যুক্ত বুলিয় এ্যালজেব্রার কথা বলা হয়েছে। যদি কোন বুলিয় অ্যালজেব্রার পদ সংখ্যা সীমিত (finite) হয় তাহলে তাকে সীমিত বুলিয় অ্যালজেব্রা বলে। দুই পদ যুক্ত বুলিয় অ্যালজেব্রার একটি বিশেষ বুলিয় অ্যালজেব্রা যার প্রয়োগ বিজ্ঞানের বহু শাখায় বিশেষত Electrical network theory ও Electronic computer-এ দেখা যায়।

(3) সেট-এর মূল সূত্রগুলির ক্ষেত্রে দ্বিত্বনীতি প্রযোজ্য তা আগেই বলা হয়েছে। '∪', '∩' এবং '/' সম্পর্কিত সেটের যে কোন সূত্রে বা অভেদে যদি '∪'-এর পরিবর্তে '+', '∩'-এর পরিবর্তে '.' এবং সার্বিক সেট U-এর পরিবর্তে ϕ এবং ϕ-এর পরিবর্তে U লেখা হয় তাহলে আর একটি সূত্র বা অভেদ পাওয়া যায় এবং এই সূত্রটিও সেটের ক্ষেত্রে সিদ্ধ।

বুলিয় অ্যালজেব্রার ক্ষেত্রেও দ্বিত্বনীতি প্রযোজ্য।

P_1 শর্তে দুটি সূত্র আছে : $a+b=b+a$

$$a\,.\,b=b\,.\,a$$

প্রথম সূত্রটিতে '+' এর পরিবর্তে '.' লেখা হলে দ্বিতীয় সূত্রটি পাওয়া যায়। সুতরাং দ্বিতীয় সূত্রটি প্রথম সূত্রের দ্বৈত (dual) বা দ্বিতীয়টি প্রথমটির দ্বৈত।

অনুরূপভাবে বলা যায় $a\,.\,(b+c)=a\,.\,b+a\,.\,c$ সূত্রটির দ্বৈত হল

$$a+b\,.\,c=(a+b)\,.\,(a+c)$$

আবার $a+0=a$ সূত্রে + এর পরিবর্তে '.' এবং 0এর পরিবর্তে 1 লেখা হলে $a\,.\,1=a$ সূত্রটি পাওয়া যায়।

অনুরূপভাবে $a+a'=1$-এর দ্বৈত হবে $a\,.\,a'=0$ এবং $a.a'=0$-এর দ্বৈত হবে $a+a'=1$.

এই আলোচনা থেকে দেখা যায় যে কোন সেট যদি বুলিয় অ্যালজেব্রা হয় তাহলে সেটে P_1, P_2, P_3, P_4 শর্তগুলি সিদ্ধ হবে এবং প্রতিটি শর্তের প্রথম

সূত্রটি দ্বিতীয়টির দ্বৈত বা দ্বিতীয়টি প্রথমটির দ্বৈত। বুলিয় অ্যালজেব্রার চারিটি শর্ত থেকে যে সকল সূত্র বা অভেদাবলী পাওয়া যায় সেই সব সূত্রে

'+' এর পরিবর্তে '.'
'.' এর পরিবর্তে '+'
'0' এর পরিবর্তে '1'
'1' এর পরিবর্তে '0'

লেখা হয় তাহলে যে সব সূত্র পাওয়া যায় সেগুলি সিদ্ধ সূত্র হয়।

যেমন $a\,.\,(a+b)=a$ সূত্রটির দ্বৈত হবে $a+a\,.\,b=a$

$(a\,.\,b)'=a'+b'$,, ,, $(a+b)'=a'\,.\,b'$

$a\,.\,b'=0$,, ,, $a+b'=1$

2·3. হানটিংটন প্রদত্ত বুলিয় অ্যালজেব্রার সংজ্ঞা থেকে এককপদ সম্পর্কীয় নিয়মগুলি, সংযোগ নিয়ম, ইডিমপোটেন্ট নিয়ম, বিশেষণ নিয়ম, পূরণ সম্পর্কিত ডি-মরগানের নিয়মগুলি ইত্যাদি অনেক নিয়ম সহজেই প্রমাণ করা যায়। এই অনুচ্ছেদে উপপাদ্য আকারে এই সূত্রগুলির প্রমাণ দেওয়া হল।

উপপাদ্য 1. B যদি একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা হয় তাহলে B-এর যে কোন পদ 'a'-র জন্য নিম্নলিখিত নিয়মগুলি সিদ্ধ।

(i) $a+a=a$ (iii) $\underline{1}+a=a+\underline{1}=\underline{1}$

(ii) $a\,.\,a=a$ (iv) $\underline{0}\,.\,a=a\,.\,\underline{0}=\underline{0}$

প্রমাণ ঃ

(i) $a=a+0$ (বুলিয় অ্যালজেব্রার P_2 শর্তানুসারে)

$-a+a\,.\,a'$ (P_4 শর্তানুসারে)

$=(a+a)\,.\,(a+a')$ (P_3 শর্তানুসারে)

$=(a+a)\,.\,\underline{1}$ (P_4 শর্তানুসারে)

$=a+a$ (P_2 শর্তানুসারে)

$\therefore\ a=a+a$

(ii) অনুরূপে, $a=a\,.\,\underline{1}$ P_2 শর্তানুসারে

$=a\,.\,(a+a')$ P_4 ,,

$=a\,.\,a+a\,.\,a'$ P_3 ,,

$=a\,.\,a+\underline{0}$ P_2 ,,

$=a\,.\,a$ P_1 ,,

$\therefore\ a=a\,.\,a$

লক্ষ্য কর $a+a=a$ এই সূত্রটির দ্বৈত $a \,.\, a=a$ এবং $a \,.\, a=a$ সূত্রটির দ্বৈত $a+a=a$ সূত্রটি।

(iii) $\underline{1}=a+a'$ P_4 শর্তানুসারে
$=a+a' \,.\, \underline{1}$ P_2 ,,
$=(a+a') \,.\, (a+1)$ P_3 ,,
$=\underline{1} \,.\, (a+1)$ P_4 ,,
$=a+\underline{1}$ P_1 ,,
$\therefore\ \underline{1}=a+1$

(iv) অনুরূপে, $\underline{0}=a \,.\, a'$ P_4 শর্তানুসারে
$=a \,.\, (a'+\underline{0})$ P_2 ,,
$=a \,.\, a'+a \,.\, \underline{0}$ P_3 ,,
$=0+a \,.\, 0$ P_4 ,,
$=a \,.\, \underline{0}$ P_2 ,,
$\therefore\ \underline{0}=a \,.\, \underline{0}$

উপপাদ্য 2. কোন বুলিয় এ্যালজেব্রায় একটি পদের একাধিক পূরক থাকতে পারে না।

প্রমাণ: ধরা যাক B একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা এবং B-এর যে কোন পদ a-র দুটি পূরক a' এবং a'' আছে।

$\therefore\ a+a'=a'+a=1$ $a \,.\, a'=0$
$a+a''=a''+a=1$ $a \,.\, a''=0$

এখন $a'=a' \,.\, 1$ P_2 শর্তানুসারে
$=a' \,.\, (a+a'')$ (কল্পনানুসারে)
$=a' \,.\, a+a' \,.\, a''$ P_3 শর্তানুসারে
$=\underline{0}+a' \,.\, a''$ P_4 ,,
$=a \,.\, a''+a' \,.\, a''$ (কল্পনানুসারে)
$=a'' \,.\, a+a'' \,.\, a'$ P_1 শর্তানুসারে
$=a'' \,.\, (a+a')$ P_3 ,,
$=a'' \,.\, 1$ P_2 ,,
$=a''$
$\therefore\ a'=a''$

অতএব B-তে কোন পদের দুটি স্বতন্ত্র (distinct) পূরক থাকতে পারে না।

উপপাদ্য 3. 'a' যদি B বুলিয় এ্যালজেব্রার যে কোন পদ হয় তাহলে $(a')'=a$

প্রমাণ ঃ যেহেতু a' পদ a পদের পূরক $a+a'=a'+a=\underline{1}$ এবং

$$a\,.\,a'=a'\,.\,a=\underline{0} \qquad \cdots \qquad (A)$$

ধরা যাক a' পদটির পূরক হল $(a')'$ তাহলে

$$\left.\begin{array}{l}(a')+(a')'=(a')'+(a')=1\\ a'\,.\,(a')'=(a')'\,.\,a'\;=\underline{0}\end{array}\right\} \qquad \cdots \qquad (B)$$

∴ (A) ও (B) থেকে বলা যায় a এবং $(a')'$ পদ দুটি 'a'' পদটির পূরক।

কিন্তু উপপাদ্য 2 থেকে পাই যে একটি পদের একাধিক স্বতন্ত্র পূরক থাকে না, অতএব $a=(a')'$

∴ উপপাদ্য 3 প্রমাণিত।

উপপাদ্য 4. a ও b যদি বুলিয় এ্যালজেব্রা B-এর দুটি পদ হয় তাহলে

(i) $a+a\,.\,b=a$

এবং (ii) $a\,.\,(a+b)=a$

প্রমাণ ঃ (i) $a+a\,.\,b=a\,.\,\underline{1}+a\,.b$ $\quad P_3$ শর্তানুসারে

$=a\,.\,(\underline{1}+b)$ $\quad P_3$ শর্তানুসারে

$=a\,.\,b$ $\quad$ উপপাদ্য 1(iii) অনুসারে

$=a$ $\quad P_2$ শর্তানুসারে

∴ $a+a\,.\,b=a$

(ii) $a\,.\,(a+b)=a\,.\,a+a\,.b$ $\quad P_3$ শর্তানুসারে

$=a+a\,.\,b$ $\quad$ উপপাদ্য 1(ii) অনুসারে

$=a$ $\quad$ উপপাদ্য 4(i) অনুসারে

∴ $a\,.\,(a+b)=a.$

উপপাদ্য 5. a ও x যদি বুলিয় এ্যালজেব্রা B'র যেকোন দুটি পদ হয় তাহলে $(a+x)\,.\,(a'+x)=x$

প্রমাণ ঃ $(a+x).(a'+x)=(x+a).(x+a')$ P_1 শর্তানুসারে

$=x+a.a'$ P_3 „

$=x+\underline{0}$ P_2 „

$=\underline{0}+x$ P_1 „

$=x$ P_2 „

উপপাদ্য 6. a, b, c যদি বুলিয় এ্যালজেব্রা B-এর যে-কোন তিনটি পদ হয় তাহলে

$$a+(a.b).c=a+a.(b.c)$$

$$a'+(a.b).c=a'+a.(b.c)$$

প্রমাণ ঃ $a+a.(b.c)=a$ উপপাদ্য 4 অনুসারে

$=a.(a+c)$ „ „ „

$=(a+ab).(a+c)$ „ „ „

$=a+(a.b).c$ P_3 শর্তানুসারে

$\therefore\ a+a.(b.c)=a+(a.b).c$

আবার, $a'+a.(b.c)=(a'+a).(a'+b.c)$ P_3 শর্তানুসারে

$=1.(a'+b.c)$ P_4 „

$=a'+b.c$ P_2 „

$=(a'+b).(a'+c)$ P_3 „

$=\{(\underline{1}.(a'+b)\}.(a'+c)$ P_2 „

$=\{(a+a').(a'+b)\}.(a+c)$ P_4 „

$=(a'+a).(a'+b).(a'+c)$ P_1 „

$=(a'+a.b).(a'+c)$ P_3 „

$=a'+(a.b).c$ P_3 „

$\therefore\ a+a.(b.c)=a'+(a.b).c.$

উপপাদ্য 7. B যদি একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা হয় তাহলে গুণ এবং যোগের জন্য সংযোগ নিয়মটি Bতে সিদ্ধ। অর্থাৎ B-এর যেকোন তিনটি পদ a, b, c-এর জন্য

(i) $a.(b.c)=(a.b).c$

(ii) $a+(b+c)=(a+b)+c$

প্রমাণ : (i) উপপাদ্য 6 থেকে পাই

$$a+a.(b.c)=a+(a.b).c$$

এবং $a'+a.(b.c)=a'+(a.b).c$

$\therefore\ \{a+a.(bc)\}.\{a'+a.(b.c\}$

$$=\{a+(a.b).c\}.\{a'+(a.b).c\}$$

$\therefore\ a.(b.c)=(a.b).c$ উপপাদ্য 5 অনুসারে

(ii) $a+(b+c)=(a+b)+c$ প্রমাণ করার জন্য প্রথমে প্রমাণ করবো যে যদি $a, b, c \in B$ তাহলে

$$a.\{(a+b)+c\}=a.\{a+(b+c\}$$

এবং $a'.\{(a+b)+c\}=a'.\{a+(b+c)\}$

$a.\{a+(b+c)\{=a$ উপপাদ্য 4. (ii) অনুসারে

$=a+a.c$ " 4. (i) "

$=a.(a+b)+a.c$ " 4. (ii) "

$=a.\{(a+b)+c\}$ P_3 শর্তানুসারে

$\therefore\ a.\{a+(b+c)\}=a.\{(a+b)+c\}$

আবার $a'.\{a+(b+c)\}=a'.a+a'.(b+c)$ P_3 শর্তানুসারে

$=\underline{0}+a'.(x+c)$ P_4 "

$=a'.(b+c)$ P_2 "

$=a'.b+a'.c$ P_3 "

$=\{\underline{0}+a'.b\}+a'.c$ P_2 "

$=(a'.a+a'.b)+a'.c$ P_4 "

$=a'.(a+b)+a'.c$ P_3 "

$=a'.\{(a+b)+c\}$ P_3 "

$\therefore\ a'.\{a+(b+c)\}=a'.\{(a+b)+c\}.$

এই অভেদ দুটির সাহায্যে অপর সংযোগ সূত্রটি সহজে প্রমাণ করা যায়।

$$a.\{a+(b+c)\}=a.\{(a+b)+c\}$$

এবং $a'.\{a+(b+c)\}=a'.\{(a+b)+c\}$

যোগ করে পাই, $[a.\{a+(b+c)+a'.\{a+(b+c)\}]$

$$=[a.\{(a+b)+c\}+a'\{(a+b)+c)\}]$$

$\therefore \quad (a+a').\{a+(b+c)\}=(a+a').\{(a+b)+c\}$ P_3 শর্তানুসারে

$\underline{1}.\{a+(b+c)\}=\underline{1}.\{(a+b)+c\}$ P_2 শর্তানুসারে

$\therefore \quad a+(b+c)=(a+b)+c.$

উপপাদ্য 8. a ও b যদি বুলিয় এ্যালজেব্রা B'র যে কোন দুটি পদ হয় তাহলে (i) $(a.b)'=a'+b'$

(ii) $(a+b)'=a'.b'$

প্রমাণ : $(a.b)'=a'+b'$-এর অর্থ হ'ল $a.b$-এর পূরক $a'+b'$.

সুতরাং প্রমাণ করতে হবে যে

$$(a.b)+(a'+b')=\underline{1}=(a'+b')+(a.b)$$

$$(a.b).(a'+b')=\underline{0}=(a'+b').(a.b)$$

এখন $(a.b)+(a'+b')=(a'+b')+(a.b)$ P_1 শর্তানুসারে

$=\{a'+b'+a\}.\{a'+b'+b\}$ P_3 "

$=\{(a'+a)+b'\}.\{a'+(b'+b)\}$ P_1 "

$=\{\underline{1}+b'\}.\}a'+\underline{1}\}$ P_4 "

$=\underline{1}.\underline{1}$ উপপাদ্য 1. (iii) অনুযায়ী

$=\underline{1}$ P_3 শর্তানুসারে।

অনুরূপভাবে $(a.b).(a'+b')=\{(a.b).a'+(a.b).b'\}$

P_3 শর্তানুসারে।

$=\{(b.a).a'+(a.b).b'\}$ P_1 শর্তানুসারে

$=\{b.(a.a')+a'.(b.b')\}$ উপপাদ্য 7 অনুসারে

$=\{b.\underline{0}+a'.\underline{0}\}$ P_4 শর্তানুসারে

$=\underline{0}+\underline{0}$ উপপাদ্য 1. (iv) অনুসারে

$=\underline{0}$ P_2 শর্তানুসারে

(ii) $(a+b)'=a'.b'$ দেখাতে হলে

প্রমাণ করতে হবে যে $(a+b).(a'.b')=(a'.b').(a+b)=\underline{0}$

এবং $(a+b)+(a'b')=(a'b')+(a+b)=\underline{1}$

$(a+b).(a'.b')=(a'.b').(a+b)$ P_1 শর্তানুসারে

$=(a'.b').a+(a'.b').b$ P_3 "

$=(b'.a').a+(a'.b').b$ P_1

$=b'.(a'.a)+a'.(b'.b)$ উপপাদ্য 7 অনুসারে

$=b'.(a.a')+a'.(b.b')$ P_1 " "

$=b'.\underline{0}+a'.\underline{0}$ P_2 " "

$=\underline{0}+\underline{0}$

$=\underline{0}$

আবার $(a+b)+a'b'$

$=\{(a+b)+a'\}.\{(a+b)+b'\}$ P_3 শর্তানুসারে

$=\{a'+(a+b)\}.\{a+(b+b')\}$

$=\{(a'+a)+b\}.\{a+\underline{1}\}$

$=\{\underline{1}+b\}.\{a+\underline{1}\}$

$=\underline{1}.\underline{1}$

$=\underline{1}$

$\therefore\ (a+b)'=a'.b'$

উপপাদ্য 9. $\underline{0}$ এবং $\underline{1}$ যদি বুলিয় এ্যালজেব্রার 'যোগ' ও 'গুণ' সাপেক্ষে এককপদ হয় তাহলে $\underline{0}'=\underline{1}$

এবং $\underline{1}'=\underline{0}$

প্রমাণ : উপপাদ্য 2 থেকে জানি যে বুলিয় এ্যালজেব্রায় কোন পদের একাধিক পূরক থাকতে পারে না।

যেহেতু $\underline{0}+\underline{1}=\underline{1}+\underline{0}=1$ (শর্ত 1 এবং শর্ত 2 অনুসারে)

$\underline{0}.\underline{1}=0=\underline{1}.0$

$\therefore\ \underline{0}'=\underline{1}$ এবং $\underline{1}'=\underline{0}$

এই উপপাদ্যগুলি থেকে দেখা যায় যে সকল মূল ধর্ম বা অভেদাবলী যারা সেট এ্যালজেব্রায় সিদ্ধ হয় সেগুলি বুলিয় এ্যালজেব্রাতেও সিদ্ধ।

দ্রষ্টব্য : বুলিয় এ্যালজেব্রায় কোন অভেদ যদি প্রমাণিত হয় তাহলে দ্বৈততানীতির সাহায্যে বলা যায় যে অনুরূপ একটি অভেদ যা পূর্বের অভেদে '+' এর পরিবর্তে '0', '.' এর পরিবর্তে '+' এবং '$\underline{0}$'-এর পরিবর্তে $\underline{1}$ ও $\underline{1}$-এর পরিবর্তে $\underline{0}$ বসিয়ে পাওয়া যায় সেট বুলিয় এ্যালজেব্রায় সিদ্ধ হবে। সুতরাং পূর্বের উপপাদ্যগুলির যে-কোন একটি অংশ প্রমাণিত হলে দ্বৈততা নীতি অনুযায়ী অপর অংশটিও সিদ্ধ হবে বলা যায়।

উপপাদ্য 10. যদি a ও b বুলিয় এ্যালজেব্রা B-এর যে-কোন দুটি পদ হয় তাহলে (i) $a+b=b$

(ii) $a.b.=a$

(iii) $a.b'=\underline{0}$

সিদ্ধান্তগুলির যে-কোন একটি সত্য হলে অপর দুটিও সিদ্ধ হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক সিদ্ধান্ত (i) সত্য অর্থাৎ $a+b=b$

$\therefore\ a.b'=a.(a+b)'$ (কল্পনানুযায়ী)

$=a.(a'.b')$ উপপাদ্য 8 অনুসারে

$=(a.a').b'$ উপপাদ্য **7** অনুসারে

$=\underline{0}.b'$ P_4 শর্তানুসারে

$=\underline{0}$ উপপাদ্য 1 (iv) অনুসারে

$\therefore$ সিদ্ধান্ত (iii) সত্য।

আবার $a=a.1$ P_2 শর্তানুসারে

$=a.(b+b')$

$=a.b+a.b'$

$=a.b+\underline{0}$

$=a.b$

(B) ধরা যাক $a.b=a$

$\therefore\ a.b'=(a.b).b'$

$=a.(b.b')$

$=a.\underline{0}$

$=\underline{0}$

$\therefore\ a.b'=0$

সুতরাং সিদ্ধান্ত (iii) সত্য।

আবার $a+b=a.b+b=b+b\cdot a=b$ উপপাদ্য 4 অনুসারে

অর্থাৎ সিদ্ধান্ত (i) সত্য।

(C) যদি $a.b'=\underline{0}$ তাহলে (A) থেকে পাই $a.b=a.$

এবং (B) থেকে পাই $a+b=b$

$\therefore$ সিদ্ধান্ত (iii) সত্য হলে সিদ্ধান্ত (i) এবং (ii) সত্য।

2·4. প্রথম অধ্যায়ে উপসেট সম্পর্কিত কয়েকটি উপপাদ্য প্রমাণিত হয়েছে। এই ধরনের কয়েকটি উপপাদ্য বুলিয় এ্যালজেব্রায় প্রমাণ করা যায় যদি 'উপসেট সম্পর্কের' অনুরূপ একটি সম্পর্কের ধারণা বুলিয় এ্যালজেব্রায় দেওয়া সম্ভব হয়। এখন এ ধরনের একটি সম্পর্কের কথা বলা হবে এবং তার সাহায্যে কয়েকটি উপপাদ্য প্রমাণিত হবে।

'ক্রম' সম্পর্ক (Order-relation)

যদি a ও b বুলিয় এ্যালজেব্রা B-এর যে-কোন দুটি পদ হয় তাহলে a ও b এর মধ্যে একটি **সম্পর্ক** থাকবে যদি $a\,.\,b'=\underline{0}$. অথবা ($a+b=b$ বা $a\,.\,b=a$)।

এই সম্পর্কটিকে 'order' বা 'ক্রম' সম্পর্ক বলা হয় এবং '$\leqslant$' দ্বারা তা সূচিত হয়।

উপপাদ্য 1. যদি $\underline{0}$ এবং $\underline{1}$. B-এর 'যোগ' ও 'গুন' সাপেক্ষে একক পদ হয় তাহলে B-এর যে-কোদ পদ 'a'-এর জন্য $\underline{0} \leqslant a \leqslant \underline{1}$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $\underline{0}\,.\,a'=\underline{0}$ উপপাদ্য 1 অনুসারে

$\therefore\ \underline{0} \leqslant a'$ (সংজ্ঞানুযায়ী)

আবার $a\,.\,\underline{1}'=a\,.\,\underline{0}$

$=\underline{0}$

$\therefore\ a \leqslant 1'$ (সংজ্ঞানুযায়ী)

$\therefore\ 0 \leqslant a' \leqslant 1'$

উপপাদ্য 2. যে-কোন বুলিয় এ্যালজেব্রা Bতে নিম্নোক্ত পাচটি ধর্ম 'ক্রম' ($\leqslant$) সম্পর্কের জন্য সর্বদাই সিদ্ধ।

(i) $a \leqslant a,\ a \in B$

(ii) যদি $a \leqslant b$ এবং $b \leqslant c$ তাহলে $a \leqslant c$ হবে

(iii) যদি $a \leqslant b$ এবং $a \leqslant c$ তাহলে $a \leqslant b\,.\,c$ হবে

(iv) যদি $a \leqslant b$ তাহলে, B এর যে-কোন পদ c-এর জন্য $a \leqslant b+c$ হবে

(v) যদি $a \leqslant b$ তাহলে $b' \leqslant a'$

প্রমাণ ঃ (i) যেহেতু $a\,.\,a'=\underline{0}$ P_4 শর্তানুসারে

$\therefore\ a \leqslant a'$

(ii) যেহেতু $a \leqslant b$ সুতরাং $a \,.\, b' = \underline{0}$

এবং যেহেতু $a \leqslant c$ „ $b \,.\, c' = \underline{0}$

এখন $a \,.\, c' = 1 \,.\, (a \,.\, c')$

$$= (a \,.\, c') \,.\, (b + b')$$

$$= (a \,.\, c') \,.\, b + (a'c') \,.\, b'$$

$$= a \,.\, (c' \,.\, b) + a \,.\, (c' \,.\, b')$$

$$= a \,.\, (b \,.\, c') + a \,.\, (b' \,.\, c')$$

$$= a \,.\, \underline{0} + (a \,.\, b') \,.\, c'$$

$$= a \,.\, \underline{0} + \underline{0} \,.\, c'$$

$$= \underline{0} + \underline{0}$$

$$= \underline{0}$$

$\therefore\ a \leqslant c$

(iii) যেহেতু $a \leqslant b \ \therefore\ a \,.\, b' = 0$

$a \leqslant c \ \therefore\ a \,.\, c' = 0$

$\therefore\ a \,.\, b' + a \,.\, c' = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$

$\therefore\ a \,.\, (b' + c') = \underline{0}$

$a \,.\, (b \,.\, c)' = 0$

$\therefore\ a \leqslant b \,.\, c$

(iv) $a \leqslant b$ সুতরাং $a \,.\, b' = \underline{0}$

$$a \,.\, (b + c)' = a \,.\, (b' \,.\, c')$$

$$= (a \,.\, b') \,.\, c'$$

$$= \underline{0} \,.\, c'$$

$$= \underline{0}$$

$\therefore\ a \leqslant (b + c)$

(v) $a \leqslant b$ সুতরাং $a \,.\, b' = 0$

$\therefore\ 0 = a \,.\, b' = (a')' \,.\, b'$

$$= b' \,.\, (a')'$$

$\therefore\ b' \leqslant a'$

উদাহরণ 1. যদি $a, b \in B$ এবং $a \leqslant b$ তাহলে প্রমাণ কর যে B-এর যে-কোন পদ C-এর জন্য

2·4. প্রথম অধ্যায়ে উপসেট সম্পর্কিত কয়েকটি উপপাদ্য প্রমাণিত হয়েছে। এই ধরনের কয়েকটি উপপাদ্য বুলিয় এ্যালজেব্রায় প্রমাণ করা যায় যদি 'উপসেট সম্পর্কের' অনুরূপ একটি সম্পর্কের ধারণা বুলিয় এ্যালজেব্রায় দেওয়া সম্ভব হয়। এখন এ ধরনের একটি সম্পর্কের কথা বলা হবে এবং তার সাহায্যে কয়েকটি উপপাদ্য প্রমাণিত হবে।

'ক্রম' সম্পর্ক (Order-relation)

যদি a ও b বুলিয় এ্যালজেব্রা B-এর যে-কোন দুটি পদ হয় তাহলে a ও b এর মধ্যে একটি **সম্পর্ক** থাকবে যদি $a \cdot b' = \underline{0}$. অথবা ($a+b=b$ বা $a \cdot b=a$)।

এই সম্পর্কটিকে 'order' বা 'ক্রম' সম্পর্ক বলা হয় এবং '$\leqslant$' দ্বারা তা সূচিত হয়।

উপপাদ্য 1. যদি $\underline{0}$ এবং $\underline{1}$. B-এর 'যোগ' ও 'গুণ' সাপেক্ষে একক পদ হয় তাহলে B-এর যে-কোদ পদ 'a'-এর জন্য $\underline{0} \leqslant a \leqslant \underline{1}$

প্রমাণঃ যেহেতু $\underline{0} \cdot a' = \underline{0}$ উপপাদ্য 1 অনুসারে

$\therefore\ \underline{0} \leqslant a'$ (সংজ্ঞানুযায়ী)

আবার $a \cdot \underline{1}' = a \cdot \underline{0}$

$= \underline{0}$

$\therefore\ a \leqslant 1'$ (সংজ্ঞানুযায়ী)

$\therefore\ 0 \leqslant a' \leqslant 1'$

উপপাদ্য 2. যে-কোন বুলিয় এ্যালজেব্রা Bতে নিম্নোক্ত পাঁচটি ধর্ম 'ক্রম' ($\leqslant$) সম্পর্কের জন্য সর্বদাই সিদ্ধ।

(i) $a \leqslant a,\ a \in B$

(ii) যদি $a \leqslant b$ এবং $b \leqslant c$ তাহলে $a \leqslant c$ হবে

(iii) যদি $a \leqslant b$ এবং $a \leqslant c$ তাহলে $a \leqslant b \cdot c$ হবে

(iv) যদি $a \leqslant b$ তাহলে, B এর যে-কোন পদ c-এর জন্য $a \leqslant b+c$ হবে

(v) যদি $a \leqslant b$ তাহলে $b' \leqslant a'$

প্রমাণঃ (i) যেহেতু $a \cdot a' = \underline{0}$ P_4 শর্তানুসারে

$\therefore\ a \leqslant a'$

(ii) যেহেতু $a \leqslant b$ সুতরাং $a . b'=\underline{0}$

এবং যেহেতু $a \leqslant c$ „ $b . c'=\underline{0}$

এখন $a . c'=1 . (a . c')$

$=(a . c') . (b+b')$

$=(a . c') . b+(a'c') . b'$

$=a . (c' . b)+a . (c' . b')$

$=a . (b . c')+a . (b' . c')$

$=a . \underline{0}+(a . b') . c'$

$=a . \underline{0}+\underline{0} . c'$

$=\underline{0}+\underline{0}$

$=\underline{0}$

$\therefore\ a \leqslant c$

(iii) যেহেতু $a \leqslant b \ \therefore\ a . b'=0$

$a \leqslant c \ \therefore\ a . c'=0$

$\therefore\ a . b'+a . c'=\underline{0}+\underline{0}=\underline{0}$

$\therefore\ a . (b'+c')=\underline{0}$

$a . (b . c)'=0$

$\therefore\ a \leqslant b . c$

(iv) $a \leqslant b$ সুতরাং $a . b'=\underline{0}$

$a . (b+c)'=a . (b' . c')$

$=(a . b') . c'$

$=\underline{0} . c'$

$=\underline{0}$

$\therefore\ a \leqslant (b+c)$

(v) $a \leqslant b$ সুতরাং $a . b'=0$

$\therefore\ 0=a . b'=(a')' . b'$

$=b' . (a')'$

$\therefore\ b' \leqslant a'$

উদাহরণ 1. যদি $a, b \in$ B এবং $a \leqslant b$ তাহলে প্রমাণ কর যে B-এর যে-কোন পদ C-এর জন্য

$a+bc=b\,.\,(a+c).$ [modulur law]

যেহেতু $a \leqslant b$ $\therefore$ $a+b=b$

$\therefore$ $b\,.\,(a+c)=(a+b)\,.\,(a+c)$

$=a+bc.$

উদাহরণ 2. যদি $a, b \in B$ তাহলে দেখাও যে

$$ab+ab'+a'b+c'b'=1$$

$\underline{1}=(a+a')\,.\,(b+b')$

$=a\,.\,(b+b')+a'\,(b+b')$

$=a\,.\,b+a\,.\,b'+a'\,.\,b+a'b'$

উপপাদ্য 3. যদি a ও b একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা B-এর এমন দুটি পদ হয় যাদের জন্য $a \leqslant b$ এবং $b \leqslant a$ উভয়েই সত্য হয়, তাহলে a ও b দুটি স্বতন্ত্র পদ হতে পারে না।

প্রমাণ : যেহেতু $a \leqslant b$, অতএব $a\,.\,b'=\underline{0}$

এবং যেহেতু $b \leqslant a$, অতএব $b\,.\,a'=\underline{0}$

আবার যেহেতু $a\,.\,b'=0$, অতএব $a+b=b$ (উপপাদ্য 10 অনুসারে)

অনুরূপে, $b\,.\,a'=0$ থেকে পাই $b+a=a$

এখন P_1 শর্তানুসারে $a+b=b+a$

$\therefore$ $a=b$

সুতরাং a ও b দুটি স্বতন্ত্র পদ নয়।

উদাহরণমালা 2A

1. পূর্বে প্রমাণিত উপপাদ্য সমূহ এবং বুলিয় এ্যালজেব্রার সংজ্ঞার সাহায্যে বুলিয় রাশিমালার সরলীকরণ সহজেই করা সম্ভব হয়। কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে তা দেখানো হ'ল :

(i) যদি a ও b বুলিয় এ্যালজেব্রা B-এর যে-কোন দুটি পদ হয় তাহলে দেখাও যে

(I) $a+b=a+b+a'$

(II) $a+a'b=a+b$

উত্তর :—(I) $a+b=(a+ab)+b$ [উপপাদ্য 4(i) অনুসারে $a=a+ab$]

$=a+(ab+b)$ [উপপাদ্য (ii) অনুসারে]

$=a+(b+ab)$ P_1 শর্তানুসারে

$=a+b+ab$

II. $a+b=a+1\,.\,b$

$=a+(a+a')\,.\,b$ P_4 শর্তানুসারে

$=a+(a\,.\,b+a'\,.\,b)$ P_3 শর্তানুসারে

$-(a+a\,.\,b)=a'\,.\,b$

$=a+b'b$ যেহেতু $a+a\,.\,b=a$

(ii) যদি $a, b, c \in B$ তাহলে দেখাও যে

$ab+bc+ca=(a+b)(b+c)(c+a)$

উত্তর ঃ $(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(a+b)(a+c)(b+c)$ P_1 শর্তানুসারে

$=(a+bc)\,.\,(b+c)$ P_3 শর্তানুসারে

$=a\,.\,(b+c)+(bc)\,.\,(b+c)$ P_3 শর্তানুসারে

$=a\,.\,b+a\,.\,c+(bc)\,.\,b+(bc)\,.\,c$ P_3 শর্তানুসারে

$=a\,.\,b+a\,.\,c+b\,.\,(c\,.\,b)+b\,.\,(c\,.\,c)$ উপপাদ্য 7(i) অনুসারে

$=a\,.\,b+a\,.\,c+b\,.\,(b\,.\,c)+b\,.\,c$ $(\because\ c\,.\,c=c)$

$=a\,.\,b+a\,.\,c+(b\,.\,b)\,.\,c+b\,.\,c$

$=a\,.\,b+a\,.\,ac+b\,.\,c+b\,.\,c$ যেহেতু $b\,.\,b=b$

$=a\,.\,b+a\,.\,c+b\,.\,c$ যেহেতু $b\,.\,c+b\,.\,c=b\,.\,c$

$=a\,.\,b+b\,.\,c+c\,.\,a.$

(iii) দেখাও যে $a\,b+ab'+a'b+a'b'=\underline{1}$

উত্তর ঃ $\underline{1}=\underline{1}\,.\,\underline{1}$

$=(a+a')\,.\,(b+b')$

$=a\,.\,(b+b')+a'\,.\,(b+b')$ P_3 শর্তানুসারে

$=a\,.\,b+a\,.\,b'+a'\,.\,b+a'\,.\,b'$ P_3 শর্তানুসারে

2. (i) যদি a ও b একটি বুলিয় এ্যালজেব্রার দুটি পদ এবং $a+b=\underline{0}$ হয় তাহলে প্রমাণ কর যে$=a=\underline{0}$ এবং $b=\underline{0}$. ($\underline{0}$ পদটি বুলিয় এ্যালজেব্রায় '+' সাপেক্ষে একক পদ।)

উত্তর ঃ $\underline{0}=\underline{0}\,.\,a=a\,.\,\underline{0}=a\,.\,(a+b)$

$=a\,.\,a+a\,.\,b$

$=a+a\,.\,b$

$=a$

$\therefore$ $a+b=\underline{0}$ থেকে পাই $\underline{0}+b=\underline{0}$ অর্থাৎ $b=\underline{0}$

সুতরাং $a+b=\underline{0}$ থেকে পাই $a=\underline{0}$ এবং $b=\underline{0}$

(ii) যদি $a \, . \, b=\underline{1}$ তাহলে প্রমাণ কর যে $a=\underline{1}$ এবং $b=\underline{1}$

উত্তর : $\underline{1}=\underline{1}+a$ উপপাদ্য 1 অনুসারে

$=a+\underline{1}$ P_1 শর্তানুসারে

$=a+a \, . \, b$ (যেহেতু $a \, . \, b=\underline{1}$)

$=a \, . \, \underline{1}+a \, . \, b$

$=a \, . \, (\underline{1}+b)$

$=a \, . \, \underline{1}$

$=a$

আবার $a \, . \, b=\underline{1}$ কিন্তু $a=\underline{1}$ সুতরাং $\underline{1} \, . \, b=\underline{1}$ অর্থাৎ $b=\underline{1}$

অতএব $a \, . \, b=\underline{1}$ থেকে পাই $a=\underline{1}$ এবং $b=\underline{1}$

3. যদি X একটি সীমিত সেট (শূন্য সেট নয়) হয় তাহলে প্রমাণ কর যে উপযুক্ত দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+', '.' এবং একপদী প্রক্রিয়া ' ' '-এর জন্য পাওয়ার সেট P(X) একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

উত্তর : P(X)-এর পদগুলির জন্য দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+', '.' এবং একপদী প্রক্রিয়া '/'-এর সংজ্ঞা এভাবে দেওয়া সম্ভব।

$A+B=A \cup B \, ; \quad A, B \in P(X)$

$A \, . \, B=A \cap B$

$A'=X-A$

$A \cup B, \, A \cap B$ এবং $X-A$ সকলেই P(X)-এর পদ।

আমরা জানি যে যে-কোন P(X)-এর যে-কোন দুটি পদ A ও B'-র জন্য $A \cup B=B \cup A$

এবং $A \cap B=B \cap A$

অর্থাৎ $A+B=B+A$

এবং $A \, . \, B=B \, . \, A$

$\therefore$ P_1 শর্তটি P(X)-তে সিদ্ধ।

আবার $A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C$
এবং $A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap C$ } অর্থাৎ $A+(B+C)=(A+B)+C$, $A.(B \, . \, C)=(A \, . \, B) \, . \, C$

সুতরাং P_3 শর্তটি P(X)-তে সিদ্ধ।

এখন ϕ (শূন্য সেট) $\in P(X)$ এবং $X \in P(X)$. আবার যে-কোন পদ A'-র জন্য $\phi + A = \phi \cup A = A$

$$X \cdot A = X \cap A = A$$

এবং $A + A' = A \cup (X - A) = X$

$$A \cdot A' = A \cap (X - A) = \phi$$

অতএব P(X) সেটটি বুলিয় এ্যালজেব্রার সব কটি শর্তই পূরণ করে

অতএব $(P(X) \; ; \; \cup, \cap, ')$ একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

****4.** মনে করি $X = \{1, 2, 3\}$.

অতএব $P(X) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$।

উদাহরণ 3 থেকে পাই যে $(P(X) \; ; \; \cup, \cap, ')$ একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা।

P(X) সেট থেকে একটি নূতন সেট গঠন করা হ'ল যাদের পদগুলি হ'ল

0, 1, 2, 3, 12, 13, 23, 123

[ϕ সেটের স্থলে সংখ্যা 0 নেওয়া হ'ল, {1, 2} সাবসেটের বদলে সংখ্যা 12 নেওয়া হ'ল। অর্থাৎ সাবসেটটি যে সংখ্যাগুলি দ্বারা গঠিত সেই সংখ্যাগুলি মানের উর্ধ্বক্রম (ascending order) অনুসারে সাজিয়ে 12 পাওয়া যায়। এইভাবে {2, 3}-এর পরিবর্তে 23, {3, 1}-এর পরিবর্তে 13 এবং {1, 2, 3}-এর পরিবর্তে 123 পাওয়া যায়।]

ধরা যাক $B = \{0, 1, 2, 3, 12, 13, 23, 123\}$.

B-এর যে-কোন দুটি পদ α ও β-র যোগ ও গুণ-এর সংজ্ঞা এভাবে দেওয়া সম্ভব :

যেমন $12 + 13 = 123$

$0 + 12 = 012 = 12$

$2 + 123 = 123$

ইত্যাদি

অর্থাৎ α ও β সকল যে সংখ্যাগুলি দ্বারা গঠিত তাদের সেটগুলিকে $S(\alpha)$ ও $S(\beta)$ দ্বারা সূচিত করলাম। $S(\alpha) \cup S(\beta)$ সেটটি গঠন করা হল এবং সেই সেটটির পদগুলিকে মানের ক্রমানুসারে একক, দশক ও শতকের স্থানে বসিয়ে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় তাহাই $\alpha + \beta$.

যদি $\alpha = 12$ হয় তাহলে $S(\alpha) = \{1, 2\}$

যদি $\beta = 13$ তাহলে $S(\beta) = \{1, 3\}$

$\therefore\ S(\alpha) \cup S(\beta) = \{1, 2, 3\}$

$\therefore\ \alpha + \beta = 123$

অনুরূপভাবে $S(\alpha) \cap S(\beta)$ সেটটির পদগুলিকে মানের ক্রমানুসারে একক, দশক ও শতকের স্থানে বসিয়ে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় তাহাই $\alpha . \beta$

যেমন $(12) . (12) = 1$

$2 . (13) = 0$

$12 . 123 = 12$

ইত্যাদি

যেহেতু

$S(\alpha) = \{1, 2\}$ $S(2) = \{2\}$

$S(\beta) = \{1, 3\}$ $S(13) = \{1, 3)$

$S(\alpha) \cap S(\beta) = \{1\}$ $S(2) \cap S(13) = \phi$

যদি $S(\alpha) \cap S(\beta) = \phi$ হয় তাহলে $\alpha . \beta = 0$ ধরা হবে।

অনুরূপভাবে $X - S(\alpha)$ সেটের পদগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সাজিয়ে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায়, তাহাই α'। যদি $X - S(\alpha) = \phi$ হয় তাহলে $\alpha' = 0$ ধরা হবে।

$\therefore\ 0' = 123$

$1' = 23$

$2' = 13$

$(123)' = 0$ ইত্যাদি।

এখন সহজেই দেখানো যায় যে B সেটটি উপরোক্ত তিনটি প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা গঠন করে।

5. প্রমাণ কর কোন বুলিয় এ্যালজেব্রায়

(i) একাধিক **শূন্যপদ**

এবং (ii) একধিক **এককপদ** থাকা সম্ভব নয়।

উত্তর: (i) যদি সম্ভব হয়, মনে কর একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা (B ; +, ., ′)-তে দুটি শূন্যপদ $\bar{0}$ এবং $\underline{0}$ আছে।

তাহলে $\bar{0} + \underline{0} = \underline{0}$ (যেহেতু $\bar{0}$ শূন্যপদ)

আবার $\bar{0} + \underline{0} = \underline{0}$ (যেহেতু $\underline{0}$ শূন্যপদ)

$\therefore\ \underline{0} = \underline{0}$

অতএব যে-কোন বুলিয় এ্যালজেব্রায় একধিক শূন্যপদ থাকতে পারে না।

(ii) যদি সম্ভব হয় মনে করি $\bar{\underline{1}}$ এবং $\underline{1}$ (B ; +, ., ')-এর দুটি এককপদ। তাহলে $\bar{\underline{1}} . \underline{1}=\underline{1}$ (যেহেতু $\bar{\underline{1}}$ এককপদ)

এবং $\bar{\underline{1}} . \underline{1}=\bar{\underline{1}}$ (যেহেতু $\underline{1}$ এককপদ)

$\therefore\ \underline{1}=\bar{\underline{1}}$

$\therefore$ বুলিয় এ্যালজেব্রায় একাধিক স্বতন্ত্র এককপদ থাকতে পারে না ।

6. প্রমাণ কর যে তিনটি পদ বিশিষ্ট বুলিয় এ্যালজেব্রা থাকা সম্ভব নয়।

উত্তর : ধরা যাক (B ; +, ., ') একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা যার পদ সংখ্যা 3. Bতে দুটি বিশেষ পদ $\underline{0}$ এর $\underline{1}$ আছে এবং তারা একাধিক নয় তা পূর্বেই জেনেছি। মনে করি a হ'ল B-এর তৃতীয় পদ। অর্থাৎ $B=\{\underline{0}, \underline{1}, a\}$

এখন $\underline{0}'=\underline{1}$ এবং $\underline{1}'=\underline{0}$ এবং কোন পদের একাধিক পূরক থাকা সম্ভব নয়।

$\therefore\ a'\neq\underline{0}$ এবং $a'\neq\underline{1}$

অতএব $a'=a$ (যেহেতু $a'\in B$)

তাহলে $\underline{1}=a+a'$

$=a+a$ (যেহেতু $a'=a$)

$=a$

এবং $\underline{0}=a\,.\,a'$

$=a\,.\,a$

$=a.$

যেহেতু $\underline{1}\neq\underline{0}$ অতএব ইহা সম্ভব নয়। অর্থাৎ কোন বুলিয় এ্যালজেব্রার পদ সংখ্যা কখনই **3** হতে পারে না।

7. যদি 'a' বুলিয় এ্যালজেব্রা B-এর যে কোন পদ হয় তাহলে $a'=a$ হতে পারে না অর্থাৎ $a'\neq a$.

উত্তর : ধরা যাক $a\in B$ এবং $a'=a$

$\therefore\ \underline{0}=a\,.\,a'$

$=a\,.\,a$

$=a$

এবং $\underline{1}=a+a'$

$=a+a$

$=a$

$\therefore\ \underline{0}=\underline{1}$

কিন্তু যে কোন বুলিয় এ্যালজেব্রায় $\underline{0} \neq \underline{1}$ সুতরাং $\underline{0} = \underline{1}$ হওয়া সম্ভব নয়। অর্থাৎ $a' = a$ কখনই Bতে সত্য হতে পারে না।

$$\therefore \quad a' \neq a.$$

8. প্রমাণ কর যে এমন কোন বুলিয় এ্যালজেব্রা থাকতে পারে না যার পদ সংখ্যা বিজোড়।

উত্তর ঃ ধরা যাক (B ; +, ., /) একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা।
আমরা জানি যে B-এর

(i) যে কোন পদের একাধিক পূরক থাকতে পারে না,
(ii) যদি $a' = b$ তাহলে $b' = a$ (যেহেতু $b' = (a')' = a$),
(iii) যে কোন পদ 'a'র জন্য $a' = a$ হতে পারে না।

মনে করি $\underline{0}$ এবং $\underline{1}$ B-এর শূন্য পদ ও একক পদ। তাহলে উপরের তথ্যগুলি থেকে বলা যায় যে B সেটকে দুটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন সেট B_1 ও B_2তে বিভক্ত করা সম্ভব। কেন না যদি $a \in B_1$ তাহলে $a' \in B_2$. যদি Bতে বিজোড় সংখ্যক পদ থাকে তাহলে B-এর এমন একটি পদ x পাওয়া যাবে যা B_1 বা B_2 কোন সাবসেটে নেই। ইহা সম্ভব নয়। সুতরাং কোন বুলিয় এ্যালজেব্রায় বিজোড় সংখ্যক পদ থাকা সম্ভব নয়। অর্থাৎ যে কোন বুলিয় এ্যালজেব্রার পদ সংখ্যা সর্বদাই জোড়।

9. মনে করি F(42) সেটটি 42-এর সকল উৎপাদকের সেট অর্থাৎ

$$F(42) = \{x : x \text{ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং } x \text{ 42-এর উৎপাদক}\}$$
$$= \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$

দেখাও যে, F(42) সেটের পদগুলির জন্য দুটি উপযুক্ত দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+', '.' এবং একটি উপযুক্ত এক পদী প্রক্রিয়া '/, আরোপ করা সম্ভব যেন (F(42) ; +, ., /) একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা হয়।

উত্তর ঃ যদি '+', '.' এবং '/' এর সংজ্ঞা এভাবে দেওয়া যায়।

(i) $a + b = a$ ও b এর ল. সা. গু.
(ii) $a \,.\, b = a$ ও b এর গ. সা. গু.
(iii) $a' = \frac{42}{a}$

তাহলে '+', '.' ও '/' এর জন্য নিম্নলিখিত তিনটি সারণি পাওয়া যায়।

+	1	2	3	6	7	14	21	42
1	1	2	3	6	7	14	21	42
2	2	2	6	6	14	14	42	42
3	3	6	3	6	21	42	21	42
6	6	6	6	6	42	42	42	42
7	7	14	21	42	7	14	21	42
14	14	14	42	42	14	14	42	42
21	21	42	21	42	21	42	21	42
42	42	42	42	42	42	42	42	43

.	1	2	3	6	7	14	21	42
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	3	1	1	3	3
6	1	2	3	6	1	2	3	6
7	1	1	1	1	7	7	7	7
14	1	2	1	2	7	14	7	14
21	1	1	3	3	7	7	21	21
42	1	2	3	6	7	14	21	42

/	
1	42
2	21
3	14
6	7
7	6
14	3
21	2
42	1

[উপরোক্ত প্রথম ও দ্বিতীয় সারণি হতে যোগ ও গুণ এভাবে নির্ণয় করা হয়। যেমন 6+7 নির্ণয় করতে হলে প্রথম সংখ্যা 6 কোন সারিতে এবং

দ্বিতীয় সংখ্যা 7 কোন স্তম্ভে আছে দেখতে হবে। এই সারি ও স্তম্ভের সংযোগ স্থলে যে সংখ্যাটি পাওয়া যাবে তাহাই $6+7$ (অর্থাৎ $6+7=42$). অনুরূপে দ্বিতীয় সারণি থেকে চতুর্থ সারি ও পঞ্চম স্তম্ভের সংযোগ স্থলে 1 পাওয়া যায় সুতরাং $6 \cdot 7=1$]

যেহেতু F(42) এর যে কোন দুটি পদ a, b এর জন্য

$a+b=a$ ও b এর ল. সা. গু.$=b$ ও a এর ল. সা. গু.$=b+a$

এবং $a \, . \, b=a$ ও b এর গ. সা. গু.$=b$ ও a এর গ. সা. গু.$=b \, . \, a$

$\therefore$ P_1 শর্তটি F(42)তে সিদ্ধ।

উপরোক্ত '+' ও '.' এর সারণি দুটি থেকে ও P_1 শর্তটির সত্যতা সম্বন্ধে নিশ্চিত হওয়া যায়।

আবার যদি $a \in F(42)$ তাহলে

$a+1=a$ ও 1 এর ল. সা. গু.$=a=1$ ও a এর ল. সা. গু.$=1+a$

অর্থাৎ $\boxed{a+1=a=1+a}$

আবার 42 এবং a এর গ. সা. গু.$=a$ ও 42 এর গ. সা. গু.$=a$

$$\therefore \quad \boxed{a \, . \, 42=42 \, . \, a=a}$$

অতএব সংখ্যা 1 F(42)-এর শূন্য পদ $\underline{0}$ এবং পূর্ণ সংখ্যা 42 F(42)-এর গুণ সাপেক্ষে একক পদ 1.

যেহেতু $42=1.\,2.\,3.\,7$ সুতরাং মৌলিক উৎপাদকগুলির মধ্যে কোন পুনরাবৃত্তি নেই। সুতরাং a ও a' বা a ও $\frac{42}{a}$ এর গ. সা. গু.$=42=\underline{1}$ এবং a ও a' এর গ. সা. গু. বা a ও $\frac{42}{a}$ এর গ. সা. গু.$=1=\underline{0}$.

$\therefore$ $a+a'=\underline{1}$ এবং $a \, . \, a'=\underline{0}$

সুতরাং P_4 শর্তটি F(42)তে সিদ্ধ।

$a \, . \, (b+c)=a \, . \, b+a \, . \, c$

এবং $a+b \, . \, c=(a+b) \, . \, (a+c)$

এই নিয়ম দুটির সত্যতা '+' ও '.' এর সারণি দুটি থেকে সহজেই যাচাই করা যায়। সুতরাং (F(42) ; +, ., /) একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

প্রশ্নমালা 2(a)

1. যদি একটি বুলিয় অ্যালজেব্রায় যে কোন তিনটি পদ a, b, c'র জন্য $a+b=a+c$ এবং $a\,.\,b=a\,.\,c$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে $b=c$

2. a ও b যদি একটি বুলিয় অ্যালজেব্রার দুটি পদ হয়, এবং যদি $a+b=a\,.\,b$ তাহলে প্রমাণ কর যে $a=b$.

3. যদি a, b ও c কোন বুলিয় অ্যালজেব্রার যে কোন তিনটি পদ হয় এবং $a+c=b+c$, ও $a+c'=b+c'$ হয় তাহলে প্রমাণ কর যে $a=b$.

4. যদি a, b, c একটি বুলিয় অ্যালজেব্রার যে কোন তিনটি পদ হয় তাহলে প্রমাণ কর যে নিম্নোক্ত রাশিমালাগুলি সমান—

(i) $(a+b)\,.\,(a'+c)\,.\,(b+c)$ (ii) $ac+a'b+bc$

(iii) $(a+b)\,.\,(a'+c)$ (iv) $ac+a'b$

5. ধরা যাক $X=\{a, b, c, d\}$. দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+' এবং '.' নিচের দুটি সারণির সাহায্যে দেখানো হয়েছে :

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	b	b
c	c	b	c	b
d	d	b	b	d

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	c	a
d	a	d	a	d

X সেটটির শূন্যপদ ($\underline{0}$) এবং একক পদ ($\underline{1}$) নির্ণয় কর। উপযুক্ত ভাবে একপদী প্রক্রিয়া '/' এর সংজ্ঞা নিরূপণ কর এবং দেখাও যে $(X\ ;\ +,\ .,\ /)$ একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা।

6. যদি $a, b, c \in B$ তাহলে প্রমাণ কর যে $abc+a'b'c'+a'b'c+a'bc'$ $+ab'c'+abc'+ab'c+a'bc=\underline{1}$

7. যদি $a, b, c \in B$ এবং $a\,.\,c=b\,.\,c$ ও $a\,.\,c'=b\,.\,c'$ তাহলে দেখাও যে $a=b$

8. যদি $a, b, c \in B$ তাহলে দেখাও যে

(i) $a\,.\,b+\{a\,.\,(a\,.\,b)'\}=a$

(ii) $\{a+(b \,.\, a')\} \,.\, \{b+(c \,.\, b')\} \,.\, c=(a+b) \,.\, c$

(iii) $a \,.\, b+a \,.\, b'+a'.b=\underline{1}$

(iv) $a \,.\, b'+[a \,.\, (b \,.\, c)']+c=a+c$

(v) $a \,.\, b \,.\, c+a \,.\, b \,.\, c'+a' \,.\, b \,.\, c=b \,.\, (a+c)$

9. যদি $a*b=a \,.\, b'+a \,.\, b$ হয় তাহলে প্রমাণ কর কর যে

(i) $a*b=b*a$

(ii) $a*a=\underline{0}$

(iii) $a*\underline{0}=a$

10. '+', '.' ও ''' প্রক্রিয়া তিনটির জন্য উপযুক্ত সারনি গঠন করে প্রমাণ কর যে (i) (F(15) ; +, ., ') একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা,

(ii) (F(30) ; +, ., ') একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা,

(iii) (F(210) ; +, ., ') একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা,

11. মনে কর B = {0, 1, 3, 7, 13, 17, 37, 137}

B সেটের পদগুলির জন্য +, ., ' প্রক্রিয়া তিনটির উপযুক্ত সংজ্ঞা দিয়ে দেখাও যে (B, +, ., ') একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা।

12. যদি $a, b, c \in$ B তাহলে নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলির মধ্যে কোন কোনটি সমান তা নির্ণয় কর।

(i) $abc'+abc+ab'$

(ii) $a \,.\, a+a \,.\, b+a \,.\, b'+a \,.\, c+(a \cdot c')$

(ii) $a+bc+(a+c)'$

বুলিয় অপেক্ষক (Boolean Function)

2·5. বীজগণিতে x, y, z প্রতীক যে-কোন বাস্তব সংখ্যার পরিবর্তে লেখা হয়। এই প্রতীকগুলিকে বাস্তব চলরাশি (variable quantity) বলা হয় এবং এই চলরাশির সম্ভাব্যমান অসীম, কেননা বাস্তব সংখ্যার সেট একটি অসীম সেট।

যদি B একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা হয় এবং এই অ্যালজেব্রার যে-কোন অনির্দিষ্ট পদ বোঝানোর জন্য যদি x, y, z ইত্যাদি প্রতীকগুলি ব্যবহৃত হয় তাহলে x, y, z ইত্যাদিকে বুলিয় অ্যালজেব্রা B-এর চলরাশি বা **বুলিয় চল** (Boolean variable) বলা হয়। যদি B দুই পদ বিশিষ্ট বুলিয় অ্যালজেব্রা হয়

এবং 0 ও 1 যদি B-এর পদ হয় তাহলে যে-কোন বুলিয় চল x-এর সম্ভাব্যমান হবে 0 কিংবা 1. যদি B চারপদ বিশিষ্ট বুলিয় অ্যালজেব্রা হয় তাহলে বুলিয় চল x B-এর যে-কোন পদের সহিত সমান হতে পারে এবং এক্ষেত্রে x-এর সম্ভাব্যমান চারটি। অনুরূপভাবে x যদি n-সংখ্যক পদ বিশিষ্ট বুলিয় এ্যালজেব্রার চলরাশি হয় তাহলে x-এর সম্ভাব্যমান হবে n.

কোন গাণিতিক আলোচনায় ব্যবহৃত কোন প্রতীক (ধরা যাক k) যদি বুলিয় এ্যালজেব্রা (B ; +, . , /)-এর কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট পদের সংগে সমান হয় তাহলে k-কে এই বুলিয় অ্যালজেব্রার পরিপ্রেক্ষিতে একটি **বুলিয় ধ্রুবক রাশি** (Boolean constant) বলা হয়।

উদাহরণ 1. ধরা যাক I সেটের পরিপ্রেক্ষিতে x একটি চলরাশি তাহলে x-এর মান I সেটের যে-কোন পদের সহিত সমান হতে পারে অর্থাৎ 0, 1, 2, 3 −1, −2, 3 · ইত্যাদি অসংখ্য ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সহিত x সমান হতে পারে। যেহেতু I সেটটি অসীম সুতরাং চলরাশি x-এর অসীম সংখ্যক সম্ভাব্যমান আছে।

0, 1, −1, 2, −2 ইত্যাদি পূর্ণসংখ্যাগুলি I সেটের ধ্রুবক রাশি। যদি $k=2$ ধরা হয় তাহলে k প্রতীকটি I-এর ধ্রুবক রাশি।

উদাহরণ 2. যদি $B=\{0, 1, a, b\}$ '+', ' . ', ও ' / ' সাপেক্ষে একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা হয় এবং এই বুলিয় অ্যালজেব্রার পরিপ্রেক্ষিতে x যদি একটি বুলিয় চল হয় তাহলে o, 1, a, b এই চারটি পদের যে কোন একটি পদের সহিত x সমান হতে পারে। অর্থাৎ x এর সম্ভাব্যমান হ'ল চার।

আবার যদি a পদকে k প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহলে k একটি বুলিয় ধ্রুবক এবং k-এর সম্ভাব্যমান কেবলমাত্র একটি ($k=a$). সুতরাং k প্রতাকটি বুলিয় এ্যালজেব্রার ধ্রুবক রাশি। লক্ষ্য কর এই বুলিয় অ্যালজেব্রায় চারটি ধ্রুবক রাশি (0, 1, a, b) আছে।

দ্রষ্টব্য : (i) যদি x একটি বুলিয় চলরাশি হয় তাহলে x'(x-এর পূরক) অপর একটি বুলিয় চলরাশি হবে।

(ii) যদি $x=0$ হয় তাহলে $x'=1$ এবং যদি $x=1$ হয় তাহলে $x'=0$.

ধরা যাক R সেট সকল বাস্তব সংখ্যার সেট। এই সেটে দুটি দ্বিপদী প্রক্রিয়া + (পাটীগাণিতিক যোগ), . (পাটীগাণিতিক গুণ) আরোপ করা সম্ভব। যোগ ও গুণ সাপেক্ষে R সেটটি বদ্ধ। ধরা যাক x, y, z ইত্যাদি R সেটের চলরাশি এবং a, b ইত্যাদি R-এর ধ্রুবক রাশি। চলরাশি x, y, z এবং ধ্রবক রাশি a, b-র উপর দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া এক বা একাধিকবার প্রয়োগ কর যে রাশিমালা (expression) পাওয়া যায় তাকে (বাস্তব রাশির সেট R সাপেক্ষে) তিনটি চলরাশির একটি বিশেষ অপেক্ষক (function) বলা হয়।

উদাহরণ : (i) $x \cdot x = x^2$, $2x^2+5x$, $4x^2+3x$, $3x.x.x=(3x^3)$ ইত্যাদি রাশিমালা একটি চলরাশির অপেক্ষক। যদি x কোন সংখ্যা সেটের পরিপ্রেক্ষিতে চলরাশি হয় তাহলে এই অপেক্ষকগুলিকে বহুপদ রাশি (polynominal) বলা হয়।

(ii) $x+y$, x^2+y^2, $(x+y)^2$, $(x+y)(x-y)$, x^2+y^2-x ইত্যাদি অপেক্ষকগুলি দুটি চলরাশি x ও y-এর অপেক্ষক। এই অপেক্ষক-গুলিকে দুটি চলরাশির বহুপদ রাশি বলা হয়।

বুলিয় অপেক্ষক (Boolean Function)

ধরা যাক, (B ; +, ., /) একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা ; x_1, x_2 দুটি বুলিয়-চল এবং k_1, k_2, k_3 তিনটি বুলিয় ধ্রুবক। এই দুটি চলরাশি এবং তিনটি বুলিয় ধ্রুবকের উপর দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+', ' . ' এবং একপদী প্রক্রিয়া ' / ' সসীম সংখ্যক বার প্রয়োগ করে যে রাশিমালা (expression) পাওয়া যায় তাদের উপরোক্ত বুলিয় অ্যালজেব্রার পরিপ্রেক্ষিতে দুটি চলরাশির বুলিয় অপেক্ষক (Boolean function of two variables) বলা হয়। দুটি বুলিয় চল-বিশিষ্ট কোন অপেক্ষককে $f(x_1, x_2)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। অনুরূপভাবে যদি $x_1, x_2 \cdots x_n$ এবং $k_1, k_2, \cdots k_m$ যথাক্রমে n সংখ্যক বুলিয় চল এবং m সংখ্যক বুলিয় ধ্রুবক হয় তাহলে এদের উপর '+', ' . ' এবং ' / ' সসীম সংখ্যক বার প্রয়োগ করে যে রাশিমালাগুলি পাওয়া যায় তাদের বুলিয় অ্যালজেব্রা B-এর পরিপ্রেক্ষিতে n-সংখ্যক বুলিয় চলের অপেক্ষক (Boolean functoon of n-variables) বলা হয়। $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ দ্বারা n-সংখ্যক বুলিয় চলের অপেক্ষককে সূচিত করা হয়।

উদাহরণ। (i) x_1+x_1', $x_1\,x_1$, $x_1\,x_1+k_1x_1'$, $x_1+k_1x_1\,.\,x_1$, ইত্যাদি রাশিমালাগুলি একটি চল-বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক।

অর্থাৎ $f_1(x_1)=x_1+x_1'$, $f_2(x_1)=x_1\,.\,x_1$,
$f_3(x_1)=x_1\,.\,x_1+k_1x_1'$ ইত্যাদি

(ii) x_1+x_2, $x_1\,.\,x_2'$, $(x_1+x_2')\,.\,(x_2+x_1')$,
$x_1\,.\,x_2'+x_1'+x_2'$ ইত্যাদি দুটি চল-বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক।

(iii) $x_1\,x_2'\,x_3'$, $x_1\,x_2\,x_3+x_1'\,x_2'\,x_3'$,
$(x_1+x_2+x_3)\,.\,(x_1+x_2'+x_3)$,
$(x_1+x_2).(x_1'+x_2+x_3')$ ইত্যাদি তিনটি চল-বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক।

(iv) $x_1x_2x_3x_4+x_1+x_2$,
$(x_1+x_2+x_3+x_4)\,.\,(x_1'+x_2'+x_3+x_4)$,
$(x_1x_2+x_4x_3)'+(x_1x_2x_3x_4)'+x_1x_2'x_3x_4'$ ইত্যাদি চারটি চল-বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক।

[পরবর্তী আলোচনায় বুলিয় চলের পরিবর্তে শুধু চল এবং বুলিয় ধ্রুবকের পরিবর্তে শুধু ধ্রুবক বলা হবে।]

দুই পদ-বিশিষ্ট বুলিয় অ্যালজেব্রার এক বা একাধিক চল-বিশিষ্ট অপেক্ষক। (Function of two element Boolean Algebra with one or more variables.)

পরবর্তী আলোচনায় আমরা দুই পদ-বিশিষ্ট বুলিয় অ্যালজেব্রার (যার পদগুলি হ'ল $\underline{0}$ এবং $\underline{1}$) পরিপ্রেক্ষিতে এক বা একাধিক চল-বিশিষ্ট অপেক্ষকদের কথা বলবো। যেহেতু $\underline{0}$ এবং $\underline{1}$ পদ-বিশিষ্ট বুলিয় অ্যালজেব্রার উপর গঠিত একাধিক চল-বিশিষ্ট ধ্রুবক পদ-বিহীন অপেক্ষকদের বহুল প্রয়োগ Switching Circuitry এবং Computer Science-এ বিশেষভাবে দেখ যায় এজন্য এই অধ্যায়ে শুধু এই বিশেষ ধরনের বুলিয় অপেক্ষকদের নানা ধর্ম আলোচিত হবে।

এক চল বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক (Boolean Tunction of Single Variable.)

ধরা যাক $f(x)$ একটি চল (x) বিশিষ্ট ধ্রুবক পদ-বিহীন বুলিয় অপেক্ষক। x চল-এর সম্ভাব্যমান দুটি 0 এবং 1. এবং $f(x)$-এর সম্ভাব্যমান হবে এক্ষেত্রে হয় 0 কিংবা 1.

যদি $x=0$ হয় তাহলে $f(x)=0$ বা 1 এবং যদি $x=1$ হয় তাহলে $f(x)=0$ বা 1.

এক্ষেত্রে কয়টি এক চল-বিশিষ্ট স্বতন্ত্র বুলিয় অপেক্ষক সম্ভব তার স্পষ্ট ধারণা নিচের সারনি হতে পাওয়া যাবে।

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0	1
1	0	1	0	1

$f_0(x)$ অপেক্ষক-এর মান x চলের ভুটি মানের জন্যই ,0 $f_1(x)=0$ যদি $x=0$ এবং $f_1(x)=1$ যদি $x=1$. $f_2(x)=\underline{1}$ যদি $x=0$ এবং $f_2(x)=0$ যদি $x=1$, $f_3(x)$-এর মান x-এর ভুটি মনের জন্যই $\underline{1}$.

স্বতরাং এক চল-বিশিষ্ট চারটি স্বতন্ত্র অপেক্ষক পাওয়া সম্ভব যাদের মান উপরোক্ত সারনি হতে পাওয়া যাবে।

লক্ষ্য কর $f_0(x)=0$, $f_1(x)=x$,

$f_2(x)=x'$ এবং $f_3(x)=1$ বলা যায়।

0, 1, x, x' এই চারটি অপেক্ষক স্বতন্ত্র এবং এগুলিকে এক চল-বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক সমূহের মূল আকার (Fundamental forms) বলা হয়। এই চারটি অপেক্ষকের উপর +, . এবং ' আরোপ করে বহু এক চল-বিশিষ্ট অপেক্ষক গঠন করা সম্ভব।

এক চল-বিশিষ্ট অপেক্ষক সমূহের মান ভুটি যদি প্রথম বন্ধনীর মধ্যে লিখে প্রকাশ করা হয় তাহলে

$f_0(x)$-এর মান ভুটি হবে (0, 0)
$f_1(x)$ " " " " (0, 1)
$f_2(x)$ " " " " (1, 0)
$f_3(x)$ " " " " (1, 1).

ভুই চল-বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক :

ধরা যাক $f(x_1, x_2)$ একটি ভুই চল-বিশিষ্ট অপেক্ষক। x_1-এর মান হয় 0 কিংবা 1, অনুরূপভাবে x_2-এর মান হয় 0 কিংবা 1. x_1 ও x_2-এর নির্দিষ্ট

মানের জন্য $f(x_1, x_2)$-এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়। x_1, x_2'র সকল সম্ভাব্য মানের জন্য $f(x_1, x_2)$ অপেক্ষকটির মান 0 কিংবা 1 হবে। যেহেতু x_1 ও x_2 চল দুটি স্বাধীন (independent) অর্থাৎ x_1-এর মান x_2'র উপর কোন প্রকারেই নির্ভরশীল নয় সুতরাং x_1 ও x_2-এর মানগুলি এভাবে প্রকাশ করা যায়:

x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

অর্থাৎ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) এই চার প্রকারের মান x_1 ও x_2 এর হতে পারে। [এখানে বন্ধনীর মধ্যে আবদ্ধ প্রথম পদটি x_1-এর মান ও দ্বিতীয় পদটি x_2-এর মান সূচিত করে।]. x_1 ও x_2'র এই চারটি মানের জন্য $f(x_1, x_2)$'র চারটি মান সম্ভব। x_1 ও x_2'র চারটি মানের জন্যই কোন অপেক্ষক $f(x_1, x_2)$র চারটি মান 0 হতে পারে, কিংবা x_1 ও x_2'র যে কোন মানের জন্য $f(x_1, x_2)$র মান 0 এবং বাকি মানগুলি 1, কিংবা x_1 ও x_2'র প্রথম দুটি মানের জন্য 0 ও তৃতীয়, চতুর্থ মানের জন্য 1, কিংবা x_1 ও x_2'র প্রথম জোড়াটির জন্য অপেক্ষকটির মান 0 এবং বাকী তিন জোড়ার জন্য অপেক্ষকটির মান 1, কিংবা x_1 ও x_2 চার জোড়া মানের জন্য অপেক্ষকটির সকল মান 1 ইত্যাদি।

নিচের সারনিতে দুই চল-বিশিষ্ট যে মূল ষোলটি অপেক্ষক পাওয়া যায় তা প্রকাশ করা হয়েছে এবং ষোলটি অপেক্ষককে যথাক্রমে $f_0(x_1, x_2)$, $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$, $f_3(x_1, x_2) \cdots\cdots f_{15}(x_1, x_2)$ বা সংক্ষেপে $f_0, f_1, f_2 \cdots\cdots f_{15}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে।

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1

$\therefore$ $f_0(0, 0)=0$ [$x_1=0$ এবং $x_2=0$'র জন্য $f_0(x_1, x_2)$'র মান $f_0(0,0)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়]

$$f_0(0, 1)=0$$
$$f_0(1, 0)=0$$
$$f_0(1, 1)=0$$

অনুরূপভাবে

$f_1(0, 0)=0$	$f_2(0, 0)=0$	$f_3(0, 0)=0$
$f_1(0\ 1)=0$	$f_2(0, 1)=0$	$f_3(0, 1)=0$
$f_1(1, 0)=0$	$f_2(1, 0)=1$	$f_3(1, 0)=1$
$f_1\ 1, 1)=1$	$f_2(1, 1)=0$	$f_3(1, 1)=1$

ইত্যাদি।

অর্থাৎ $f_0(x_1, x_2)$ অপেক্ষকটির চারটি মান হ'ল (0, 0, 0, 0)

$f_1(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(0, 0, 0, 1)
$f_2(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(0, 0, 1, 0)
$f_3(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(0, 0, 1, 1)
$f_4(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(0, 1, 0, 0)
$f_5(x_1,x_2)$	,,	,,	,,	,,	(0, 1, 0, 1)
$f_6(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(0, 1, 1, 0)
$f_7(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(0, 1, 1, 1)
$f_8(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(1, 0, 0, 0)
$f_9(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(1, 0, 0, 1)
$f_{10}(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(1, 0, 1, 0)
$f_{11}(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(1, 0, 1, 1)
$f_{12}(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(1, 1, 0, 0)
$f_{13}(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(1, 1, 0, 1)
$f_{14}(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(1, 1, 1, 0)
$f_{15}(x_1, x_2)$	,,	,,	,,	,,	(1, 1, 1, 1)

এই ষোলটি অপেক্ষক দুই চল-বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক সমূহের মূল আকার। এই অপেক্ষকগুলির উপর মূল প্রক্রিয়া তিনটি +, . এবং '/' বারবার আরোপ করে বিভিন্ন বুলিয় অপেক্ষক পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য : (i) এক চল-বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক সমূহের মূল আকারের সংখ্যা হ'ল $4 = 2 \times 2 = 2^2 = 2^{2^1}$.

(ii) দুই চল-বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক সমূহের মূল আকারে সংখ্যা হ'ল

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 2^{2^2}$$

(iii) এই ভাবে সারণির সাহায্যে বলা যায় যে তিন চল-বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক সমূহের মূল আকারের সংখ্যা হ'ল $2^{2^3} = 2^8$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256.$$

এবার এই মূল আকারগুলি নিয়ে আলোচনা করলে দেখা যাবে যে তাদের সাধারণতঃ দুই ভাগে ভাগ করা যায়। এদের একটির নাম হ'ল **বৈকল্পিক স্বভাবী আকার** (Disjunctive Normal Form). এবং অপরটির নাম হ'ল **যৌগিক স্বভাবী আকার** (Conjunctive Normal Forms).

বৈকল্পিক স্বভাবী আকার :

মনে করি (B, +, ., ') একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা এবং x_1, x_2 এই বুলিয় অ্যালজেব্রার দুটি চল। এই দুইটি বুলিয় চল এবং এদের পূরক দ্বারা আমরা নিম্নলিখিত গুণরাশি (Product term) গঠন করতে পারি। এই গুণ রাশিগুলি হ'ল : $x_1 . x_2$, $x_1' . x_2$, $x_1 . x_2'$, $x_1' . x_2'$. যেহেতু প্রতিটি গুণরাশিতে দুটি পদ আছে এবং প্রথম পদ (বা উৎপাদক)-এর স্থলে x_1 বা x_1' লেখা যায় এবং দ্বিতীয় পদটির স্থলে x_2 বা x_2' লেখা যায় সুতরাং দুটি উৎপাদক-বিশিষ্ট গুণরাশির মোট সংখ্যা হ'ল $2 \times 2 = 4$. এই চারটি গুণ রাশিগুলি থেকে যে কোন সংখ্যক স্বতন্ত্র গুণরাশি নিয়ে দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+' দ্বারা যুক্ত করলে একটি বুলিয় অপেক্ষক পাওয়া যাবে। এই বুলিয় অপেক্ষককে বৈকল্পিক স্বভাধী আকারের অপেক্ষক বলা হয়। মনে রাখতে হবে যে গুণ রাশিগুলি যাতে একে অপরের থেকে ভিন্ন হয় (অর্থাৎ একই গুণরাশি একাধিকবার নেওয়া চলবে না)।

$x_1 . x_2' + x_1' x_2'$, $x_1 x_2 + x_1' x_2'$, $x_1' x_2 + x_1 x_2'$, $x_1 x_2 + x_1' . x_2' + x_1 . x_2'$ ইত্যাদি দুই চল-বিশিষ্ট বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের বুলিয় অপেক্ষক। লক্ষ্য কর যে, এক্ষেত্রে সকল গুণ রাশিগুলির যোগফল হবে

$x_1x_2+x_1' \cdot x_2+x_1 \cdot x_2'+x_1' \cdot x_2=(x_2x_1+x_2 \cdot x_1'+x_2' \cdot x_1$
$+x_2' \cdot x_1'=x_2 \cdot (x_1+x_1')+x_2' \cdot (x_1+x_1')$

$$=x_2 \cdot \underline{1}+x_2' \cdot \underline{1} \quad (\because \quad x_1+x_1'=\underline{1})$$

$$=x_2+x_2'$$

$$=\underline{1} \quad (\because \quad x_2+x_2'=\underline{1} \text{ এবং } x_2 \cdot \underline{1}=x_2,\ x_2' \cdot \underline{1}=x_2')$$

সুতরাং $\underline{1}$ (এককপদ) একটি বিশেষ ধরণের বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের বুলিয় অপেক্ষক।

অনুরূপ ভাবে বলা যায় যে যদি $x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$ একটি বুলিয় অ্যালজেব্রার n-সংখ্যক চল হয় তাহলে $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ এবং এদের পূরক দ্বারা

$$x_1'\, x_2'\, x_3' \cdots\cdots x'_{n-1}\, x_n',$$
$$x_1'\, x_2'\, x_3' \cdots\cdots x_{n-1}'\, x_n$$
$$x_1'\, x_2'\, x_3' \cdots\cdots x_{n-1}\, x_n$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$
$$x_1'\, x_2'\, x_3 \cdots\cdots x_{n-1}\, x_n$$
$$x_1,\, x_2\, x_3 \cdots\cdots x_{n-1}\, x_n'$$
$$x_1\, x_2\, x_3 \cdots\cdots x_{n-1}\, x_n$$

এই গুণ রাশিগুলি লেখা যায়। এদের সংখ্যা হ'ল $2 \times 2 \times 2 \times \cdots n$ সংখ্যক বার $=2^n$. প্রতিটি গুণ রাশিতে n-সংখ্যক উৎপাদক আছে। প্রথম উৎপাদকের স্থলে x_1 বা x_1'. দ্বিতীয় উৎপাদকের স্থলে x_2 বা $x_2' \cdots n$তম উৎপাদকের স্থলে x_n বা x_n' লেখা যায়। উপরোক্ত গুণ রাশিগুলি থেকে **যে-কোন সংখ্যক** পরস্পর ভিন্ন গুণরাশি যদি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+' দ্বারা যুক্ত করা যায় তাহলে যে অপেক্ষকটি পাওয়া যায় তাকে বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের বুলিয় অপেক্ষক বলা হয়। [মনে রাখতে হবে যে একই গুণরাশি একাধিকবার নেওয়া চলবে না।]

দ্রষ্টব্য ঃ (1) $\underline{0}$ এবং $\underline{1}$ এক বিশেষ ধরনের বৈকল্পিক স্বভাবী আকার যুক্ত বুলিয় অপেক্ষক।

(2) যদি $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ অপেক্ষকটি n সংখ্যক বুলিয় চলের বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের হয় তাহলে $f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$-কে n সংখ্যক উৎপাদক

বিশিষ্ট গুণ রাশির যোগফল আকারে প্রকাশ করা যাবে এবং প্রতিটি গুণ রাশির প্রথম উৎপাদক হয় x_1 বা x'_1, দ্বিতীয় উৎপাদকটি হয় x_2 বা x_2' এবং এই ভাবে n-তম উৎপাদকটি হয় x_n বা x_n' হবে।

উদাহরণ। (i) $x_1x_2x_3+x_1x_2'x_3=f(x_1, x_2, x_3)$ এক্ষেত্রে $f(x_1, x_2, x_3)$ দুটি গুণ রাশির যোগফল। প্রতিটি গুণ রাশিতে তিনটি করে উৎপাদক আছে। এদের প্রথম উৎপাদকটি x_1, দ্বিতীয় উৎপাদকটি x_2 বা x_2' এবং তৃতীয় উৎপাদকটি x_3. সুতরাং $f(x_1, x_2, x_3)=x_1\ x_2\ x_3+x_1\ x_2'x_3$ অপেক্ষকটি বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের।

(ii) $x_1\ x_2'\ x_3+x_1\ x_2=f(x_1, x_2, x_2)$

$f(x_1, x_2, x_3)$ অপেক্ষকটি তিন চল-বিশিষ্ট। এই আপেক্ষকটি দুটি গুণ রাশির যোগফল। কিন্তু প্রতিটি গুণ রাশিতে তিনটি করে উৎপাদক নেই। [যেমন দ্বিতীয় গুণ রাশিটিতে দুটি মাত্র উৎপাদক আছে।] সুতরাং $f(x_1, x_2, x_3)$ কে তিনটি চল এর গুণ রাশির যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা যাচ্ছে না। অতএব $x_1\ x_2\ x_3'+x_1\ x_2$ অপেক্ষকটি বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের নয়।

**বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের আর একটি সংজ্ঞা

বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষকের সংজ্ঞা এভাবে দেওয়া যায়। এই সংজ্ঞাটি হতে বুলিয় অপেক্ষকের ধারণা অনেকটা স্পষ্ট হয়।

ধরা যাক x_1, x_2, x_3 একটি দুইপদ বিশিষ্ট বুলিয় অ্যালজেব্রার চল। এই তিনটি বুলিয় চল রাশি দ্বারা নিম্নলিখিত গুণ রাশিগুলি গঠন করা যায়:

মনে কর, $x_1'\,.\,x_2'\,.\,x_3'=P_0$ $\quad x_1\,.\,x_2'\,.\,x_3'=P_4$

$x_1'\,.\,x_2'\,.\,x_3=P_1$ $\quad x_1\,.\,x_2'\,.\,x_3=P_5$

$x_1'\,.\,x_2\,.\,x_3'=P_2$ $\quad x_1\,.\,x_2\,.\,x_3'=P_6$

$x_1'\,.\,x_2\,.\,x_3=P_3$ $\quad x_1\,.\,x_2\,.\,x_3=P_7$

যদি $f(x_1, x_2, x_3)$-কে $m_0P_0+m_1P_1+m_2P_2+m_3P_3+m_4P_4+m_5P_5m_6P_6+m_7P_7$ আকারে প্রকাশ করা সম্ভব হয় তাহলে f-কে বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের অপেকক বলা হয়।

$$(m_i=0, 1\ ;\ i=0, 1, 2\cdots 7).$$

যদি $m_0=m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=0$ হয়

তাহলে, $f(x_1, x_2, x_3)=0 . P_0+0 . P_1+0 . P_2+0 . P_3$

$$+0 . P_4+0 . P_5+0 . P_6+0 . P_7.$$

$$=0+0+0+0+0+0+0+0$$

$$=\underline{0}.$$

অতএব $\underline{0}$ এবং $\underline{1}$ হ'ল এক বিশেষ প্রকারের বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষক।

সুতরাং $f(x_1, x_2, x_3)$ যদি 0 বা 1 না হয় এবং $f(x_1, x_2, x_3)$ কে যদি বৈকল্পিক স্বভাবী আকারে প্রকাশ করা হয় তাহলে গুণ রাশিগুলি ($P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$) মধ্যে যে কোন r সংখ্যক (r হবে 1 এর চেয়ে বড় কিংবা সমান ও 7 এর চেয়ে ছোট কিংবা 7 এর সমান অর্থাৎ $1 \leqslant r \leqslant 7$). গুণরাশি '+' দ্বারা যুক্ত হবে।

সংজ্ঞা : যদি $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ একটি বুলিয় এ্যালজেব্রার n সংখ্যক চল হয় তাহলে n সংখ্যক চল দ্বারা নিম্নলিখিত 2^n সংখ্যক গুণরাশি গঠন করা সম্ভব :—

$$x_1' . x_2' x_3' \cdots x_{n-1}' x_n' = P_0$$
$$x_1' x_2' x_3' \cdots x_{n-1}' x_n = P_1$$
$$x_1' x_2' x_3' \cdots x_{n-1} x_n' = P_2$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n-1} x_n'$$
$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n-1} x_n = P_{2^n-1}$$

এখন কোন বুলিয় অপেক্ষক $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$-কে যদি

$$f(x_1, x_2 \cdots x_n)=m_0P_1+m_1P_1+m_2P_2+\cdots+m_{2^n-1} P_{2^n-1}$$
$$=\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i P_i$$

[$a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}$কে সংক্ষেপে $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।]

আকারে প্রকাশ করা যায় তাহলে এই আকারকে $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ অপেক্ষকটির বৈকল্পিক স্বভাবী আকার বলা হয়। $m_0, m_1 \cdots$ইত্যাদির মান 0 কিংবা 1.

উদাহরণঃ দেখাও যে $f(x_1, x_2, x_3)=x_1' x_2' x_3+x_1x_2.x_3'$ অপেক্ষকটি বৈকল্পিক স্বভাবী আকারে আছে।

উত্তরঃ ধরা যাক $f(x_1, x_2, x_3)$

$$=m_0x_1' x_2' x_3'+m_1x_1' x_2' x_3+m_2 x_1' x_2 x_3'$$
$$+m_3 x_1' x_2x_3+m_4x_1 x_2' x_3'+m_5x_1 x_2' x_3$$
$$+m_6x_1x_2 x_3'+m_7x_1x_2 x_3'$$

এখন যদি কোন তিন চল-বিশিষ্ট অপেক্ষক $f(x_1, x_2, x_3)$-কে এভাবে প্রকাশ করা যায়

$$f(x_1, x_2, x_3)=m_0P_0+m_1P_1+m_2P_2+m_3P_3+m_4P_4+m_5P_5$$
$$m_6+P_6+m_7P_7$$

$$\left.\begin{array}{l} m_0=0 \text{ বা } 1 \\ m_1=0 \text{ বা } 1 \\ m_2=0 \text{ বা } 1 \\ m_3=0 \text{ বা } 1 \\ m_4=0 \text{ বা } 1 \\ m_5=0 \text{ বা } 1 \\ m_6=0 \text{ বা } 1 \\ m_7=0 \text{ বা } 1 \end{array}\right\} \quad \text{সংক্ষেপে } m_i=0 \text{ বা } 1\,; \quad i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

তাহলে অপেক্ষকটির এই আকারকে **বৈকল্পিক স্বভাবী আকার** বলা হয় এবং এই প্রকাশভঙ্গীকে $f(x_1, x_2, x_3)$-এর বৈকল্পিক স্বভাবী আকারে প্রকাশ বলা হয়।

[লক্ষ্য কর যে $m_0=0$ হলে $m_0 . P_0=0 . P_0=0$ এবং $m_0=1$ হলে $m_0 . P_0=1 . P_0=P_0$

$$\therefore \quad f(x_1, x_2, x_3)=0+m_1P_1+m_2P_2+m_3P_3+m_4P_4+m_5P_5$$
$$+m_6P_6+m_7P_7 \text{ যদি } m_0=0$$

এবং $f=1 . P_0+m_1P_1+m_2p_2+m_3P_3+m_4P_4+m_5P_5+m_6 P_6$
$+m_7P_7$ যদি $m_1=1$

$$=P_0+m_1P_1+m_2P_2+m_3P_3+m_4P_4+m_5P_6+m_6P_6$$
$$+m_7P_7.$$

অতএব যদি $m_0=1$ হয় তাহলে P_0 যোগরাশিটিতে উপস্থিত থাকে

এবং যদি $m_0=0$ „ „ „ „ অনুপস্থিত থাকে।

আবার যদি $m_0=m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=1$ হয় তাহলে

$$f(x_1, x_2, x_3)=P_0+P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7$$

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1' x_2' x_3'+x_1' x_2' x_3'+x_1' x_2 x_3'$$
$$+x_1' x_2x_3+x_1 x_2' x_3'+x_1 x_2 x_3'+x_1 x_2 x_3$$
$$=x_1' x_2' (x_3'+x_3)+x_1' x_2 (x_3'+x_3)$$
$$+x_1 x_2' (x_3'+x_3)+x_1 x_2 (x_3'+x_3)$$
$$=x_1' (x_2'+x_2)+x_1(x_2'+x_2)$$
$$=x_1' . 1+x_1 . 1=1]$$

যদি $m_0=m_2=m_3=m_4=m_5=m_7=0$

এবং $m_7=m_6=1$ হয় তাহলে

$$f(x_1, x_2. x_3)=x_1' x_2' x_3+x_1x_2 x_3'+0 . x_1' x_2' x_3'$$
$$+0 . x_1' x_2 x_3'+0 . x_1' x_2 x_3+0 . x_1 x_2' x_3'$$
$$+1 . x_1 x_2 x_3'+0 . x_1 x_2 x_3$$
$$=x_1' x_2' x_3+x_1 x_2 x_3'$$

সুতরাং $x_1' x_2' x_3+x_1 x_2 x_3'$ অপেক্ষকটি বৈকল্পিক নরম্যাল আকারে আছে।

যৌগিক স্বভাবী আকার ঃ

মনে করি x_1, x_2 একটি বুলিয় এ্যালজেব্রার দুটি চল। এই দুটি চল এবং এদের পূরক দ্বারা নিম্নলিখিত যোগ রাশি (sum term) গঠন করা যায়—

$$x_1'+x_2'$$
$$x_1'+x_2$$
$$x_1+x_2'$$
$$x_1+x_2$$

এই যোগ রাশির সংখ্যা হবে 4. এই চারটি যোগ রাশি থেকে যে-কোন সংখ্যক স্বতন্ত্র যোগরাশি যদি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '.' দ্বারা যুক্ত করা হয় তাহলে যে অপেক্ষক পাওয়া যায় তাকে **যৌগিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষক** বলা হয়।

এক্ষেত্রে মনে রাখতে হবে যে যোগ রাশিগুলি যেন পরস্পর ভিন্ন হয় অর্থাৎ একই যোগরাশি একাধিকবার নেওয়া চলবে না।

$(x_1'+x_2').(x_1+x_2'), (x_1'+x_2).(x_1+x_2), (x_1+x_2).(x_1+x_2')$ $(x_1'+x_2)$ ইত্যাদি অপেক্ষকগুলি দুই চল-বিশিষ্ট যৌগিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষক।

অনুরূপভাবে, $(x_1'+x_2+x_3').(x_1+x_2+x_3')$,

$(x_1'+x_2'+x_3).(x_1+x_2+x_3)$,

$(x_1+x_2'+x_3').(x_1'+x_2'+x_3).(x_1+x_2+x_3)$.

তিন চল-বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষকগুলিও যৌগিক নরম্যাল আকারের।

এভাবে বলা যায় যে যদি $x_1, x_2, \cdots x_n$ একটি বুলিয় অ্যালজেব্রার n-সংখ্যক চল হয় তাহলে $x_1, x_2 \cdots x_n$ এবং এদের পূরক দ্বারা

$$x_1'+x_2'+x_3'+\cdots+x'_{n-1}+x_n',$$
$$x_1'+x_2'+x_3'+\cdots+x_{n-1}'+x_n.$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$
$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n'$$
$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n$$

ইত্যাদি যোগ রাশি গঠন করা যায় এবং এদের সংখ্যা হ'ল $2\times2\times\cdots n$ সংখ্যক $=2^n$. উপরোক্ত যোগ রাশিগুলি থেকে যে কোন সংখ্যক স্বতন্ত্র যোগরাশি যদি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '.' দ্বারা যুক্ত করা যায় তাহলে যে অপেক্ষকটি পাওয়া যায় তাকে যৌগিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষক বলা হয়।

উদাহরণ। (i) ধরা যাক $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2+x_3').(x_1'+x_2+x_3)$.

এই অপেক্ষকটিকে উপরোক্ত আটটি যোগ রাশির মধ্যে মাত্র দুটি যোগ রাশির গুণফল হিসেবে প্রকাশ করা হয়েছে সুতরাং অপেক্ষকটি যৌগিক স্বভাবী আকারের।

(ii) ধরা যাক $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2).(x_1'+x_2'+x_3)$

এখানে প্রথম যোগ রাশিটিতে তিনটি চল নেই এবং উপরে বর্ণিত আটটি যোগ রাশির মধ্যে (x_1+x_2) নেই। অতএব এই অপেক্ষকটি যৌগিক স্বভাবী আকারে নেই।

****যৌগিক স্বভাবী আকারের আর একটি সংজ্ঞা ঃ**

মনে করি x_1, x_2, x_3 একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা B এর তিনটি চল।

ধরা যাক $x_1'+x_2'+x_3'=s_0$

$$x_1'+x_2'+x_3=s_1$$
$$x_1'+x_2+x_3'=s_2$$
$$x_1'+x_2+x_3=s_3$$
$$x_1+x_2+x_3'=s_4$$
$$x_1+x_2'+x_3=s_5$$
$$x_1+x_2+x_3'=s_6$$
$$x_1+x_2+x_3=s_7$$

x_1, x_2, x_3 তিনটি চল দ্বারা উপরোক্ত আটটি যোগরাশি s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7 গঠন করা যায়। এখন যদি কোন বুলিয় অপেক্ষক $f(x_1, x_2, x_3)$কে এভাবে প্রকাশ করা সম্ভব হয়—

$$f(x_1, x_2, x_3)=(m_o+s_0).(m_1+s_1).(m_2+s_2).(m_3+s_3).$$
$$(m_4+s_4).(m_5+s_5).(m_5+s_6).(m_7+s_7).$$

$m_i=0$ বা 1, $i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

তাহলে $f(x_1, x_2, x_3)$কে **যৌগিক স্বভাবী আকারের** বলা হয়।

লক্ষ্য কর যে যদি $m_0=0$ হয় তাহলে $m_0+s_0=0+s_0=s_0$

এবং $m_0+s_0=1+s_0=1$ যদি $m_0=1$

সুতরাং যদি $m_0=0$ তাহলে $f(x_1, x_2, x_3)$

$=s_0.(m_1+s_1)(m_2+s_2).(m_3+s_3)(m_4+s_4)(m_5+s_5)(m_6+s_6)$ (m_7+s_7), এবং যদি $m_0=1$ তাহলে $f(x_1, x_2, x_3)=(1+s_0)$. $(m_1+s_1)(m_2+s_2)(m_3+s_3)(m_4+s_4)(m_5+s_5)(m_6+s_6)(m_7+s_7)$ $=(m_1+s_1)(m_2+s_2)\cdots\cdots(m_7+s_7)$.

অতএব $m_o=0$ হলে s_0 যোগ রাশিটি একটি উৎপাদকরূপে উপস্থিত থাকে এবং $m_0=1$ হলে এ ধরণের কোন উৎপাদক থাকে না।

আবার যদি $m_0=m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=0$ হয়

তাহলে $f(x_1, x_2, x_3)=s_0.s_1.s_2.s_3.s_4.s_5.s_6.s_7=0$ হবে

এবং যদি $m_0=m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=1$ হয়

তাহলে $f(x_1, x_2, x_3)=1.1.1.1.1.1.1.1$

$$=1$$

সুতরাং 0 এবং 1 এক বিশেষ ধরণের যৌগিক নরম্যাল আকারের অপেক্ষক। অতএব $f(x_1, x_2, x_3)$ যদি 0 এবং 1 না হয় এবং অপেক্ষকটি যদি যৌগিক নরম্যাল আকারে হয় তাহলে অপেক্ষকটির যোগ রাশিগুলি $s_i (i=0, 1 \cdots\cdots 7)$ এর মধ্যে যে কোন r-সংখ্যক $(1 \leqslant r \leqslant 7)$ যোগরাশি গুণ (.) চিহ্ন দ্বারা যুক্ত হবে।

সংজ্ঞা ঃ ধরা যাক $x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots x_n$ একটি বুলিয় অ্যালজেব্রার n-সংখ্যক চল। n-সংখ্যক চল দ্বারা নিম্নলিখিত 2^n-সংখ্যক যোগ রাশি গঠন করা যায়—

$$x_1'+x_2'+x_3'+x'_{n-1}+x_n'=s_0 \text{ (মনে কর)}$$
$$x_1'+x_2'+x_3'+\cdots\cdots+x_{n-1}'+x_n=s_1$$
$$x_1'+x_2'+x_3'+\cdots\cdots+x_{n-1}+x_n=s_2$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$
$$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{n-1}+x_n'=S_{2^n-2}$$
$$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{n-1}+x_n=S_{2^n-1}.$$

যদি কোন বুলিয় অপেক্ষক $f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$কে এভাবে প্রকাশ করা যায়—

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)=(m_0+s_0).(m_1+s_1).(m_2+s_2)\cdots\cdots (m_{n-1}+s_{2^n-1})$$

তাহলে এই আকারকে অপেক্ষকটির যৌগিক স্বভাবী আকার বলা হয়।

উদাহরণ ঃ (i) দেখাও যে $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2+x_3').(x_1+x_2'+x_3)$ অপেক্ষকটি যৌগিক স্বভাবী আকারে আছে।

যদি $x_1+x_2+x_3'=s_6$ এবং $x_1'+x_2'+x_3=s_1$ ধরা হয় তাহলে

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= s_6 . s_1 \\ &= (0+s_6).(0+s_1) \\ &= (1+s_0).(0+s_1).(1+s_2).(1+s_3).(1+s_4). \\ &\quad (1+s_5).(0+s_6).(1+s_7). \end{aligned}$$

সুতরাং $f(x_1, x_2, x_3)$ অপেক্ষকটি যৌগিক স্বভাবী আকারে আছে।

(ii) যদি $f(x_1, x_2, x_3)$ অপেক্ষকটি যৌগিক স্বভাবী আকারে থাকে এবং যদি $m_1=m_2=m_3=m_4=m_7=0$ এবং $m_0=m_5=m_6=1$ তাহলে অপেক্ষকটি নির্ণয় কর।

ধরা যাক $f(x_1, x_2, x_3)=(m_0+s_0).(m_1+s_1).(m_2+s_2).(m_3+s_3).(m_4+s_4).(m_5+s_5).(m_6+s_6).(m_7+s_7)$

m_1 এর উপরোক্ত মানের জন্য $f(x_1, x_2, x_3)$

$$=(1+s_0).(0+s_1).(0+s_2).(0+s_3).(0+s_4).(1+s_5).(1+s_6).(0+s_7)=1.s_1.s_2.s_3.s_4.1.1\,s_7$$

$$=s_1, s_2\, s_3\, s_4\, s_7$$

$$=(x_1'+x_2'+x_3).(x_1'+x_2+x_3').(x_1'+x_2+x_3).(x_1+x_2'+x_3').(x_1+x_2+x_3)$$

দ্রষ্টব্য : (i) 0 এবং 1 এক বিশেষ ধরণের যৌগিক স্বভাবী আকারের n-চলবিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক ($n \geqslant 1$).

(ii) যদি $f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$ অপেক্ষকটি যৌগিক স্বভাবী আকারে থাকে তাহলে $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$কে $s_0, s_2, \cdots\cdots s_n$ যোগ রাশির গুণরাশিরূপে প্রকাশ করা যাবে। এই গুণ রাশিতে কোন যোগ রাশি একাধিকবার থাকবে না। লক্ষ্য কর যে $s_i, (i=0, 1, 2 \cdots\cdots n-1)$ রাশিটি n-সংখ্যক চলের যোগফল এবং যোগরাশিটির প্রথম পদ হয় x_1 বা x_1', দ্বিতীয় পদ x_2 বা x_2', তৃতীয় পদ হয় x_3 বা x_3' ইত্যাদি।

একপদ রাশি (monomial) ও বহুপদ রাশি (Polynomial)

যদি $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা B-এর $n(\geqslant 1)$ সংখ্যক চল হয়, 'a' যদি B-এর একটি ধ্রুবক হয় এবং P যদি সসীম সংখ্যকচলরাশির গুণরাশি হয় তাহলে a . Pকে B-এর পরিপ্রেক্ষিতে একটি **একপদ রাশি** বলা হয়। এ ধরণের কয়েকটি স্বতন্ত্র একপদ রাশি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+' দ্বারা যুক্ত হয়ে যে পদ গঠন করে তাকে B-এর একটি **বহুপদ রাশি** বলা হয়। এখন বৈকল্পিক স্বভাবী আকার ও যৌগিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষকদের কয়েকটি উপপাদ্য প্রমাণ করা হবে।

উপপাদ্য 1. ধ্রুবক পদবিহীন n(⩾1) সংখ্যক বুলিয় চলবিশিষ্ট যেকোন বুলিয় অপেক্ষককে ঐ n-সংখ্যক চলবিশিষ্ট যৌগিক স্বভাবা আকারে প্রকাশ করা যায়।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $f(x_1, x_2 \cdots\cdots x_n)$ একটি ধ্রুবক পদবিহীন n-চল বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক।

I. সর্ব প্রথম দেখতে হবে যে অপেক্ষকটিতে $(x+y)'$, $(x+y+z)'$, $(xy)'$ $(xyz)'$, $(x+yz)'$, $\{x . (y+z)\}'$ইত্যাদি ধরণের কোন পদ আছে কি না। যদি অপেক্ষকটিতে এই ধরনের কোন পদ থাকে তাহলে ডি-মরগ্যানের সূত্র দুটি অর্থাৎ $(x+y)'=x' . y'$, $(x . y)'=x'+y'$ এক বা একাধিক বার প্রয়োগ করে অপেক্ষকটি হতে বন্ধনী দূর করে সরল করতে হবে।

যদি এ ধরণের কোন পদ না থাকে তাহলে পরবর্তী ধাপে যেতে হবে।

II. এই ধাপে বিচ্ছেদ নিয়ম দুটি অর্থাৎ $x . (y+z)=x . y+x . z$

$$x+y . z =(x+y) . (x+z)$$

এক বা একাধিকবার প্রয়োগ করলেই অপেক্ষকটি একটি বহুপদ রাশিতে পরিণত হবে।

যদি প্রথম ধাপের পর অপেক্ষকটি বহুপদ রাশিতে পরিণত হয়, তাহলে বিচ্ছেদ নিয়ম দুটি প্রয়োগের প্রয়োজন নেই। এক্ষেত্রে তৃতীয় ধাপে যেতে হবে।

III. তৃতীয় ধাপে বহুপদ রাশিটির প্রতিটি পদ পরীক্ষা করে দেখতে হবে যে পদটিতে n-সংখ্যক চলের প্রত্যেকটি উপস্থিত আছে কি না। যদি কোন পদে সব কটি পদ চল উপস্থিত থাকে তাহলে সেই পদটির আর কোন পরিবর্তন প্রয়োজন নেই। কোন পদে যদি একটি চল x_i অনুপস্থিত থাকে তাহলে সেই পদটিকে এভাবে লিখতে হবে—

$$\text{পদ}=\text{পদ} . 1=\text{পদ} . (x_i+x_i')$$
$$=\text{পদ} . x_i+\text{পদ} . x_i'$$

এইভাবে পদটি এমন দুটি পদের যোগফলরূপে প্রকাশিত হবে যাদের প্রত্যেকটিতে সবকটি চল উপস্থিত আছে।

একইভাবে যদি কোন পদে দুটি চল x_i এবং x_j অনুপস্থিত থাকে তাহলে পদটিকে এভাবে লিখতে হবে—

$$\text{পদ}=\text{পদ} . 1=\text{পদ} . (x_i+x_i') . (x_j+x_j')$$
$$=\text{পদ}\ x_i . x_j+\text{পদ}\ x_i . x_j'+\text{পদ}\ x_i'x_j+\text{পদ}\ x_i . x_j'$$

এইভাবে প্রতিটি পদে n-সংখ্যক চলের প্রত্যেকটিকে উপস্থিত করা যাবে। সর্বশেষে দেখতে হবে যে কোন পদ বহুপদ রাশিটিতে একাধিকবার উপস্থিত আছে কি না। যদি কোন পদ একাধিকবার উপস্থিত থাকে তাহলে পদটিকে একবার মাত্র নিতে হবে কেন না যে কোন বুলিয় রাশি 'a'-এর জন্য $a+a=a$ হয়।

অতএব অপেক্ষকটি গুণ রাশির যোগফলরূপে প্রকাশিত হ'ল। এই যোগফলটিই $f(x_1, x_2 \cdots\cdots x_n)$ এর বৈকল্পিক স্বভাবী আকার।

উদাহরণ ঃ $f(x_1, x_2)=x_1+(x_1+x_2)'.(x_1'+x_2)$-কে বৈকল্পিক স্বভাবী আকারে প্রকাশ কর।

প্রথম ধাপ ঃ ডি-মরগ্যানের সূত্রানুসারে $(x_1+x_2)'=x_1'.x_2'$

$\therefore \ f(x_1, x_2)=x_1+x_1'.x_2'.(x_1'+x_2)$

দ্বিতীয় ধাপ ঃ $f(x_1, x_2)=x_1+x_1'.x_2'.x_1'+x_1'.x_2'.x_2$

(বিচ্ছেদ সূত্রানুসারে)

$$=x_1+x_1'.x_1'.x_2'+x_1'(x_2'.x_2)$$

$$=x_1+x_1'.x_2'+x_1'.0$$

($\because \ x_1'.x_1'=x_1'$ এবং $x_2'.x_2=0$)

$$=x_1+x_1'.x_2'+0=x_1+x_1'.x_2'$$

এখন অপেক্ষকটি বহুপদ রাশিতে পরিণত হয়েছে।

তৃতীয় ধাপ ঃ এই বহুপদ রাশিটির প্রথম পদে দুটি চল উপস্থিত নেই সুতরাং $x_1=x_1 . 1=x_1 .(x_2+x_2')=x_1 . x_2+x_1 . x_2'$

$\therefore \ f(x_1 . x_2)=x_1 . x_2+x_1 . x_2'+x_1'. x_2'$

অতএব অপেক্ষকটি বৈকল্পিক স্বভাবী আকারে পরিণত হয়েছে।

উপপাদ্য 2 : **ধ্রুবক পদ-বিহীন $n(n \geqslant 1)$ সংখ্যক বুলিয় চল-বিশিষ্ট যে-কোন বুলিয় অপেক্ষককে ঐ n-সংখ্যক চল-বিশিষ্ট যৌগিক স্বভাবী আকারে প্রকাশ করা যায়।**

প্রমাণঃ ধরা যাক $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ একটি ধ্রুবক পদ-বিহীন $n(\geqslant 1)$ সংখ্যক চলের একটি বুলিয় অপেক্ষক।

I. প্রথমে $(x+y)'$, $(xy)'$, $(x+y+z)'$, $(xyz)'$, $(xy+z)'$ ইত্যাদি ধরনের রাশিমালা অপেক্ষকটির কোন পদে উপস্থিত আছে কিনা দেখতে হবে। যদি এধরনের পদ উপস্থিত থাকে তাহলে ডি-মরগ্যানের সূত্রানুসারে এই সকল রাশিমালাকে $x'y'$, $x'+y'$, $x'y'z'$, $x'+y'+z'$, $(x'+y').z'$ ইত্যাদি আকারে পরিণত করতে হবে।

II. তারপর এক বা একাধিকবার '+' ও '.'-এর বিচ্ছেদ নিয়ম দুটি প্রয়োগ করে $f(x_1, x_2, x_3)$-কে এক বা একাধিক বহুপদ রাশির গুণফলরূপে প্রকাশ করতে হবে।

যদি এই বহুপদ রাশির প্রতিটি পদে একটিমাত্র চল থাকে তাহলে আর বিচ্ছেদ নিয়ম প্রয়োগ করার প্রয়োজন নেই। কিন্তু যদি বহুপদ রাশির কোন পদে এক বা একাধিক চল '.' দ্বারা যুক্ত থাকে তাহলে $x+y.z=(x+y).(x+z)$ নিয়মটি এক বা একাধিকবার প্রয়োগ করতে হবে যাতে বহুপদ রাশির প্রতিটি পদে একটিমাত্র চল উপস্থিত থাকে।

III. এবার দেখতে হবে প্রতিটি পদে সব চলগুলি উপস্থিত কিনা। যদি উৎপাদক p-তে চল x অনুপস্থিত থাকে তাহলে $p=p+0$ লিখতে হবে।

এখন $p+0=p+x.x'=(p+x).(p+x')$

যদি p-তে দুটি চল $x.y$ অনুপস্থিত থাকে তাহলে p-কে এভাবে লিখতে হবে—

$$\begin{aligned} p &= p+0 \\ &= p+x.x' \qquad (\because x.x'=0) \\ &= (p+x).(p+x') \\ &= (p+x+yy').(p+x'+yy') \qquad (\because yy'=0) \\ &= (p+x+y)(p+x+y').(p+x'+y).(p+x'+y'). \end{aligned}$$

এই পদ্ধতি প্রয়োগ করে প্রতিটি উৎপাদকে প্রত্যেক চলকে উপস্থিত করতে হবে। যদি কোন পদ একাধিকবার উপস্থিত থাকে তাহলে পদটিকে একবার মাত্র নিতে হবে কেননা যে-কোন বুলিয় রাশি 'a'-র জন্য $a.a=a$ হয়।

অতএব অপেক্ষকটিকে যোগরাশির গুণফলরূপে প্রকাশিত হল। এই গুণফলটিই $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$-এর যৌগিক স্বভাবী আকার।

উদাহরণ 1. $f(x_1, x_2)=x_1+(x_1+x_2)' . (x_1'+x_2)$-কে যৌগিক আকারে প্রকাশ কর।

প্রথম ধাপ : ডি-মরগ্যানের সূত্রানুসারে $(x_1+x_2)'$-কে লেখা যায় $x_1' . x_2'$.

$$\therefore \quad f(x_1, x_2)=x_1+x_1' . x_2' . (x_1'+x_2)$$

দ্বিতীয় ধাপ : $f(x_1, x_2)=x_1+(x_1' . x_2')(x_1'+x_2)$

$$=(x_1+x_1' . x_2') . (x_1+x_1'+x_2)$$

(দ্বিতীয় বিচ্ছেদ নিয়ম অনুসারে)

$$=(x_1+x_1') . (x_1+x_2')(1+x_2) \qquad (\because x_1+x_1'=1)$$

$$=1 . (x_1+x_2') . 1 \qquad (\because 1+x_2=1)$$

$$=(x_1+x_2')$$

এক্ষেত্রে তৃতীয় ধাপের প্রয়োজন নেই।

উদাহরণ 2. যদি $(B ; +, ., ')$ একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা এবং u, v, w এই অ্যালজেব্রার তিনটি চল হয় তাহলে $f(u, v, w)=(u+v+w) . (uv+u'w)'$ অপেক্ষকটিকে বৈকল্পিক ও যৌগিক স্বভাবী আকারে প্রকাশ কর।

উত্তর : (i) **বৈকল্পিক স্বভাবী আকার**

প্রথম ধাপ : $f(u, v, w)=(u+v+w) . \{(uv)' . (u'w)'\}$

$$=(u+v+w) . (u'+v') . (u''+w')$$

$$=(u+v+w) . (u'+v') . (u+w') \qquad (\because u''=u)$$

দ্বিতীয় ধাপ : এখন বিচ্ছেদ নিয়ম দুটি প্রয়োগ করে পাওয়া যায়

$$f(u, v, w)=\{u+ v+w)\} . \{u+w'\} . (u'+v')$$

$$=\{u+(v+w) . w'\} . (u'+v')$$

$$=(u+vw'+ww') . (u'+v')$$

$$=(u+vw'+0) . (u'+v') \qquad (\because ww'=0)$$

$$=0+uv'+u'vw'+w'.0$$

$$(\therefore \quad uu'=0=vv')$$

$$=uv'+u'vw'$$

তৃতীয় ধাপ ঃ প্রথম পদ uv'-তে w চলটি উপস্থিত নেই সুতরাং

$$uv'=uv'.1=uv'.(w+w')=uv'w+uv'w'$$

$$\therefore \quad f(u, v, w)=uv'w'+u'vw'+uv'w$$

অতএব $f(u, v, \omega)$ অপেক্ষকটিকে তিনটি চল রাশির গুণরাশির যোগফলেরূপে প্রকাশ করা যাচ্ছে। সুতরাং $uv'w+uv'w'+u'vw'$ আকারটি $f(u, v, w)$ অপেক্ষকের বৈকল্পিক স্বভাবী আকার।

(ii) **যৌগিক স্বভাবী আকার**

প্রথম ধাপ ঃ $f(u, v, w)=(u+v+w).(uv+u'.w)'$

$$=(u+v+w).\{(uv)'.(u'w)'\}$$

$$=(u+v+w).(u'+v').(u+w')$$

(ডি-মরগ্যানের সূত্রানুসারে)

দ্বিতীয় ধাপ ঃ যেহেতু $(u+v+w).(u'+v').(u+w')$ আকারে প্রত্যেকটি বন্ধনীর মধ্যে যে রাশিমালা আছে তাহাতে $u+v.w$ ধরনের কোন পদ নেই। সুতরাং বিচ্ছেদ নিয়মগুলি প্রয়োগ করার প্রয়োজন নেই।

তৃতীয় ধাপ ঃ যেহেতু $u'+v'$ যোগরাশিটিতে w চল অনুপস্থিত এবং $u+w'$ যোগ রাশিটিতে v চলটি অনুপস্থিত সুতরাং

$$u'+v'=u'+v'+w.w'=(u'+v'+w).(u'+v'+w')$$

এবং $u+w'=(u+w')+v.v'=(u+w'+v).(u+w'+v')$

$$\therefore \quad f(u, v, w)=(u+v+w).(u'+v'+w).(u'+v'+w').$$

$$(u+v+w')(u+v'+w')$$

লক্ষ্য কর যে যোগরাশিগুলির মধ্যে কোনটি একাধিকবার উপস্থিত নেই

সুতরাং $f(u, v, w)=(u+v+w).(u'+v'+w).(u'+v'+w')$

$$.(u+v+w').u+v'+w')$$

আকারটি অপেক্ষকটির যৌগিক স্বভাবী আকার।

সম্পূর্ণ বৈকল্পিক নরম্যাল আকার (Complete Disjunctive Normal form) ও সম্পূর্ণ যৌগিক নরম্যাল আকার (Complete Conjunction Normal form) ।

ধরা যাক $x_8, r_2, \cdots x_n$ একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা (B ; +, ., /)-এর পরিপ্রেক্ষিতে n-সংখ্যক বুলিয় চল, $(n \geqslant 1)$. এই n-সংখ্যক চল দ্বারা আমরা নিম্নে বর্ণিত 2^n সংখ্যক গুণ রাশিও যোগরাশি গঠন করতে পারি।

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = x_n' \, x'_{n-1} \cdots x_2' x_1' \\ p_1 = x_n' \, x'_{n-1} \cdots x_2' x_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ p_{2^n-1} = x_n \, x_{n-1} \cdots x_2 x_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} s_0 = x_n' + x_{n-1}' + \cdots\cdots x_2' + x_1' \\ s_1 = x_n' + x_{n-1}' + \cdots + x_2' + x_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ s_{2^n-1} = x_n + x_{n-1} + \cdots + x_2 + x_1 \end{array}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} = x_n' x_{n-1}' \cdots\cdots x_2' x_1'$$
$$+ x_n' \,.\, x_{n-1}' \cdots x_2' x_1 + \cdots + x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$$

$= 2^n$-সংখ্যক গুণরাশির যোগফল

এই সকল গুণরাশির যোগফলকে n-সংখ্যক বুলিয় চলের **সম্পূর্ণ বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের** অপেক্ষক বলা হয়।

অনুরূপভাবে $s_0 + s_1 + \cdots\cdots s_n = (x_n' + x'_{n-1} + \cdots + x_2' + x_1') \,.$
$$(x_n' + x_{n-1} + x_2' + x_n) \cdots\cdots (x_n + x_{n-1} + \cdots + x_2 + x_1)$$

$= 2^n$ সংখ্যক যোগ রাশির গুণফল

এই সকল যোগ রাশির গুণফলকে n-সংখ্যক বুলিয় চলের **সম্পূর্ণ যৌগিক স্বভাবী আকারের** অপেক্ষক বলা হয়।

অতএব দুই চল-বিশিষ্ট সম্পূর্ণ বৈকল্পিক নরম্যাল আকারের অপেক্ষক হবে, $x_1' x_2' + x_1' x_2 + x_1 x_2' + x_1 x_2$ এবং সম্পূর্ণ যৌগিক নরম্যাল আকারে অপেক্ষক হবে $(x_1' + x_2') \,.\, (x_1' + x_2) \,.\, (x_1 + x'_2)(x_1 + x_2)$.

অনুরূপভাবে তিন চলবিশিষ্ট সম্পূর্ণ বৈকল্পিক ও যৌগিক আকার হবে যথাক্রমে

$$x_1' x_2' x_3' + x_1' x_2' x_3 + x_1' x_2 x_3' + x_1' x_2 x_3 + x_1 x_2' x_3' + x_1 x_2' x_3$$
$$+ x_1 x_2 x_3' + x_1 x_2 x_3$$

এবং $(x_1'+x_2'+x_3').(x_1'+x_2'+x_3).(x_1'+x_2+x_3').(x_1+x_2'+x_3').(x_1+x_2'+x_3).(x_1+x_2+x_3').(x_1'+x_2+x_3).(x_1+x_2+x_3)$

সম্পূর্ণ স্বভাবী আকারের অপেক্ষকদের কয়েকটি ধর্ম

ধর্ম 1. (i) যদি $\phi(x_1, x_2, x_3)$ সম্পূর্ণ বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষক হয় তাহলে $\phi(x_1, x_2, x_3)$ এর মান হবে 1

এবং (ii) যদি $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ সম্পূর্ণ যৌগিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষক হয় তাহলে $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ এর মান হবে 0.

প্রমাণ ঃ (i) $\phi(x_1, x_2, x_3)=x_1'x_2'x_3'+x_1'x_2'x_3+x_1'x_2x_3'+x_1'x_2x_3+x_1x_2'x_3'+x_1x_2x_3'+x_1x_2x_3$

$$=x_1'x_2'(x_3'+x_3)+x_1'x_2(x_3'+x_3)+x_1x_2'(x_3'+x_3)+x_1x_2(x_3'+x_3)$$

$$=x_1'x_2'.1+x_1'x_2.1+x_1x_2'.1+x_1x_2.1 \qquad (\because\ x_3'+x_3=1)$$

$$=x_1'(x_2'+x_2)+x_1(x_2'+x_2)$$

$$=x_1'.1+x_1.1 \qquad (\because\ x_2'+x_2=1)$$

$$=x_1'+x_1=1$$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে n চল-বিশিষ্ট সম্পূর্ণ বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষকের মান হবে 1.

(ii) $\Psi(x_1, x_2, x_3)=(x_1'+x_2'+x_3').(x_1'+x_2'+x_3)(x_1'+x_2+x_3').(x_1'+x_2+x_3).(x_1+x_2'+x_3')(x_1+x_2'+x_3)(x_1+x_2+x_3').(x_1+x_2+x_3)$.

$$=\{x_1'+(x_2'+x_3')(x_2'+x_3)\}\{x_1'+(x_2+x_3')(x_2+x_3)\}.\{x_1+(x_2'+x_3')(x_2'+x_3)\}.\{x_1+(x_2+x_3')(x_2+x_3)\}$$

$$=\{x_1'+x_2'+x_3'x_3\}\{x_1'+x_2+x_3'x_3\}\{x_1+x_2'+x_3'x_3\}.\{x_1+x_2+x_3'x_3\}$$

$= (x_1'+x_2'+0)(x_1'+x_2+0)(x_1+x_2'+0)(x_1+x_2+0)$

$= (x_1'+x_2'x_2)(x_1+x_2'x_2) = (x_1'+0) . (x_1+0)$

$= x_1' . x_1 = 0.$

এই ভাবে দেখানো যায় যে n চল-বিশিষ্ট সম্পূর্ণ যৌগিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষকের মান হবে 0.

ধর্ম 2. যদি $x_1, x_2 \cdots x_n$ একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা B-এর $n\ (\geqslant 1)$ সংখ্যক চল হয় এবং n সংখ্যক চলের প্রত্যেকটি যদি কোন স্বেচ্ছাধীন কিন্তু নির্দিষ্ট (arbitrary but fixed) প্রকারে 0 বা 1 মান ধারণ করে তাহলে (i) এই চলগুলির সম্পূর্ণ বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের একটি এবং কেবল মাত্র একটি পদের মান 1 হবে এবং বাকীপদগুলির মান হবে 0 এবং (ii) এই চলগুলির সম্পূর্ণ যৌগিক নরম্যাল আকারের একটি এবং একটি মাত্র পদের মান 0 হবে এবং বাকীপদগুলির মান হবে 1.

প্রমাণ। (i) মনে কর x_n এর মান হ'ল a_n

x_{n-1} " " a_{n-1}

... ...

x_1 " " " a_1

এবং এক্ষেত্রে $a_n=0$ অথবা 1, $a_{n-1}=0$ অথবা 1, $\cdots$ $a_1=0$ অথবা 1 অর্থাৎ $a_i=0$ অথবা 1 $(i=1, 2, 3 \cdots n)$.

$$\therefore \quad (x_n, x_{n-1}, \cdots x_2, x_1)=(a_n, a_{n-1} \cdots a_2, a_1).$$

এখন সম্পূর্ণ বৈকল্পিক আকারের অপেক্ষক হতে এমন একটি গুণ রাশি p নির্বাচিত করতে হবে যাতে x_i পদ গুণ রাশিতে থাকবে যদি $a_i=1$ হয় এবং যদি $a_i=0$ হয় তাহলে ঐ গুণ রাশিতে x'_i পদ থাকবে।

তাহলে $x_n=a_n. \ x_{n-1}=a_{n-1}, \cdots . x_1=a_1$ মানের জন্য নির্বাচিত পদটির মান হবে $p=1 . 1 . 1 \cdots 1$

অন্যান্য সকল গুণ রাশিতে অন্ততঃ একটি উৎপাদক0 থাকায় অপর সকল গুণরাশির মান 0 হবে।

(ii) এই ধর্মটির প্রমাণ উপরোক্ত প্রমাণের অনুরূপ।

উদাহরণ 1. যদি $\phi(x_1, x_2, x_3)$ তিনটি চল-বিশিষ্ট সম্পূর্ণ বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষক হয় এবং যদি $x_1=0, x_2=0, x_3=1$ হয় তাহলে দেখাও যে আটটি গুণ রাশির মধ্যে একটির মান 1 এবং অন্যান্য গুণ রাশির মান 0 হবে।

উত্তর: এক্ষেত্রে $a_1=0$

$$a_2=0$$
$$a_3=1$$

যেহেতু $a_1=0$ সুতরাং একটি গুণ রাশি স্থির করতে পারি যাতে a_1 থাকবে এবং যেহেতু $a_2=0$. সুতরাং গুণ রাশিটিতে x_2' থাকবে এবং যেহেতু $a_3=1$ সুতরাং গুণ রাশিটিতে x_3 থাকবে। সুতরাং নির্ণেয় গুণ রাশি হ'ল $x_1'x_2'.x_3$. এবং এর মান হ'ল $1.1.1=1$. বাকি গুণরাশি-গুলির মান হবে 0.

উদাহরণ 2. যদি $x_1=0, x_2=1, x_3=0$ তাহলে দেখাও যে তিন চল-বিশিষ্ট সম্পূর্ণ যৌগিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষকটির একটি মাত্র পদ এর মান হবে 0 এবং বাকী পদগুলির মান হবে 1.

এক্ষেত্রে $a_1=0$

$$a_2=1$$
$$a_3=0$$

সুতরাং নির্ণেয় পদ হবে $(x_1+x_2'+x_3)$ এবং এর মান হবে 0, বাকি পদগুলির মান 1.

সারনি দ্বারা প্রকাশিত বুলিয় অপেক্ষকের (ধ্রুবক পদ বিহীন) বৈকল্পিক ও যৌগিক স্বভাবী আকার নির্দ্ধারণ।

তিন চল-বিশিষ্ট স্বভাবী আকারের বুলিয় অপেক্ষকের মান সারণি দ্বারা এভাবে নির্ণয় করা যায়।

ধরা যাক x_1, x_2, x_3 একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা B-এর তিনটি চল। x_1 এর মান হয় 0 কিংবা 1, অনুরূপ ভাবে x_2 ও x_3 এর মান হবে হয় 0 কিংবা 1. সুতরাং x_1, x_2 ও x_3 মোট আট প্রকারের মান ধারণ করতে পারে—

(0, 0, 0) অর্থাৎ $x_1=0, x_2=0, x_3=0$

(0, 0, 1) „ $x_1=0, x_2=0, x_3=1$

$(0, 1, 0)$ „ $x_1=0, x_2=1, x_3=0$

$(0, 1, 1)$ „ $x_1=0, x_2=1, x_3=1$

$(1, 0, 0)$ „ $x_1=1, x_2=0, x_3=0$

$(1, 0, 1)$ „ $x_1=1, x_2=0, x_3=1$

$(1, 1, 0)$ „ $x_1=1, x_2=1, x_3=0$

$(1, 1, 1)$ „ $x_1=1, x_2=1, x_2=1$

(x_1, x_2, x_3) এর এই আট প্রকার মানের জন্য আটটি গুণ রাশি

$$p_1=x_1' x_2' x_3' \qquad p_4=x_1 x_2' x'_3$$

$$p_1=x_1' x_2' x_3 \qquad p_5=x_1 x_2' x_3$$

$$p_2=x_1' x_2 x_3' \qquad p_6=x_1 x_2 x_3'$$

$$p_3=x_1' x_2 x_3 \qquad p_7=x_1 x_2 x_3$$

এভাবে নির্ণয় করা সম্ভব। ধরা যাক, $(x_1, x_2, x_3)=(1, 0, 1)$

$$\therefore\ p_0=x_1' . x_2' . x_3'=0 . 1 . 0=0$$

$$(\because\ x_1'=0, x_2'=1\ x_3=0)$$

$$p_1=x_1' . x_2' . x_3=0 . 1 . 1=0$$

$$p_2=x_1' x_2 x_3' \ =0 . 0 . 0=0$$

$$p_3=x_1' x_2 x_3 \ =0 . 0 . 1=0$$

$$p_4=x_1 x_2' x_3' \ =1 . 1 . 0=0$$

$$p_5=x_1 x_2' x_3 \ =1 . 1 . 1=1$$

$$p_6=x_1 x_2 x_3' \ =1. 0 . 0=0$$

$$p_7=x_1 x_2 x_3 \ =1 . 0 . 1=0.$$

শুধু p_5 এর মান 1 এবং বাকি গুণ রাশিগুলির মান 0.

এভাবে দেখানো যায় (x_1, x_2, x_3)-র আটটি মানের জন্য p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 গুণ রাশিগুলির মান শুধু একটি ক্ষেত্রে 1 এবং বাকি ক্ষেত্রে 0 হবে। (x_1, x_2, x_3) এর সম্ভাব্য আটটি মানের জন্য $p_i(i=0, 1, \dots 7)$-এর মানগুলি আমরা নিচের সারণি থেকে পেতে পারি।

x_1	x_2	x_3	$x_1'x_2'x_3'$	$x_1'x_2x_3'$	$x_1'x_2x_3'$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

$x_1'x_2x_3$	$x_1\,x_2'\,x_3$	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3'$	$x_1x_2x_3$
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

সারণি 1

আমরা জানি যে, যে কোন ধ্রুবক পদবিহীন অপেক্ষককে বৈকল্পিক স্বভাবী আকারে প্রকাশ করা সম্ভব। সুতরাং $f(x_1. x_2, x_3)$ যদি যে কোন বুলিয় অপেক্ষক হয় তাহলে

$$f(x_1, x_2, x_3)=m_0\,p_0+m_1\,p_1+m_2\,p_2+m_3\,p_3+m_4\,p_4$$
$$+m_5\,p_5+m_6\,p_6+m_7\,p_7\ \ (m_i=0 \text{ বা } 1, i=0, 1, 2 \cdots 7)$$
$$\therefore\ \ f(0, 0, 0)=m_0 . 1+m_1 . 0+m_2 . 0+m_3 . 0+m_4 . 0$$
$$+m_5 . 0+m_6 . 0+m_7 . 0 \text{ (সারণি 1 থেকে)}$$
$$=m_0=0 \text{ অথবা } 1$$

এই ভাবে পাই $f(0, 0, 1)=m_1=0$ অথবা 1

$f(0, 1, 0)=m_2=0$ „ 1

$f(0, 1, 1)=m_3=0$ „ 1

$f(1, 0, 0)=m_4=0$ „ 1

$f(1, 0, 1)=m_5=0$ „ 1

$f(1, 1, 0)=m_6=0$ „ 1

$f(1, 1, 1)=m_7=0$ „ 1

ধরা যাক ধ্রুবক পদবিহীন একটি বুলিয় অপেক্ষকের বৈকল্পিক স্বভাবী আকার হ'ল

$$F(x_1, x_2, x_3)=x_1{}' x_2{}' x_3+x_1 x_2 x_3{}'+x_1 x_2{}' x_3$$
$$=p_1+p_6+p_5$$

∴ সারণি 1 থেকে আমরা দেখি $F(0, 0, 0)=0+0+0=0$

$F(0, 0, 1)=1+0+0=1$

$F(0, 1, 0)=0+0+0=0$

$F(0, 1, 1)=0+0+0-0$

$F(1, 0, 0)=0+0+0=0$

$F(1, 0, 0)=0+0+0=1$

$F(1, 1, 0)=0+1+0=1$

$F(1, 1, 1)=0+0+0=0$

অতএব $F(x_1, x_2, x_3)=p_1+p_6+p_5$ অপেক্ষকটির মান নিম্নলিখিত সারণি দ্বারা প্রকাশ করতে পারি :

$x1$	x_2	x_3	$F(x_1, x_2 x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

সারণি—2

বিপরীত ক্রমে যদি ধ্রুবক পদবিহীন কোন বুলিয়অপেক্ষক এই ধরণের কোন সারণি দ্বারা প্রকাশিত হয়, তাহলে বুলিয় অপেক্ষকটির বৈকল্পিক আকার সহজেই নির্ণয় করা সম্ভব হয়।

একটি উদাহরণের সাহায্যে এখন তা দেখানো হবে।

ধর $f(x_1, x_2, x_3)$ একটি বুলিয় অপেক্ষক এবং তা নিচের সারণি দ্বারা প্রকাশ করা হ'ল :

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

সারণি—3

সারণি-3 থেকে দেখা যায় যে, $f(0, 0, 0)=f(1, 0, 0)$
$=f(1, 1, 1)=1$

এবং $f(0, 0, 1)=f(0, 1, 0)=f(0, 1, 1)$
$=f(1, 0, 1)=f(1, 1, 0)=0$

মনে কর $m_0\, x_3'\, x_2'\, x_1'+m_1\, x_1'\, x_2'\, x_3+m_2\, x_1'\, x_2\, x_3'$
$+m_3\, x_1'\, x_2\, x_3+m_4\, x_1\, x_2'\, x_3'+m_5 x_1\, x_2'\, x_3+m_6\, x_1\, x_2\, x_3'$
$+m_7\, x_1\, x_2\, x_3$. হ'ল $f(x_1, x_2, x_3)$ অপেক্ষকটির বৈকল্পিক আকার।

যেহেতু $f(0, 0, 0)=1$, $\therefore\ m_0=1$, অনুরূপভাবে বলা যায় $m_4=m_7=1$

এবং $m_1=m_2=m_3=m_5=m_6=0$

$\therefore\ f(x_1, x_2, x_3)=1\ .\ x_1'\, x_2'\, x_3'+1\ .\ x_1 x_2'\, x_3'+1.x_1 x_2\, x_3$
$=x_1'\, x_2'\, x_3'+x_1\, x_2'\, x_3'+x_1\, x_2\, x_3.$

সুতরাং $x_1'\, x_2'\, x_3'+x_1\, x_2'\, x_3'+x_1\, x_2\, x_3$ হ'ল $f(x_1, x_2, x_3)$ অপেক্ষকটির বৈকল্পিক আকার।

অনুরূপভাবে তিনটি চল-বিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষকের (ধ্রুবক পদবিহীন) যৌগিক আকারের মান নিচের সারণির সাহায্যে সহজেই নির্ণয় করতে পারি।

x_1	x_2	x_3	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

সারণি—4

[$s_0=x_1'+x_2'+x_3'$, $s_2=x_1'+x_2'+x_3$, $s_3=x_1'+x_2+x_3'$ ইত্যাদি]

ধরা যাক $(x_1'+x_2'+x_3')\ (x_1+x_2'+x_3')\,.\,(x_1+x_2'+x_3)$ হ'ল একটি ধ্রুবক পদবিহীন বুলিয় অপেক্ষক $\phi(x_1, x_2, x_3)$-এর যৌগিক নরম্যাল আকার। অতএব সারণি 4 থেকে আমরা দেখি—

$$\phi(0, 0, 0)=1.1.1=1, \quad \phi(0, 0, 1)=1.1.1=1$$
$$\phi(0, 1, 0)=1.1.0=0, \quad \phi(0, 1, 1)=1.0.1=0$$
$$\phi(1, 0, 0)=1.1.1=1, \quad \phi(1, 0, 1)=1.1.1=1$$
$$\phi(1, 1, 0)=1.1.1=1, \quad \phi(1, 1, 1)=0.1.1=0$$

$\therefore$ $\phi(x_1, x_2, x_3)$ অপেক্ষকটির মান সারণি 5 দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

x_1	x_2	x_3	$\phi(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

সারণি—5

বিপরীতক্রমে যদি কোন বুলিয় অপেক্ষককে সারণির দ্বারা সূচিত করা হয় তাহলে অপেক্ষকটির যৌগিক স্বভাবী আকার সহজেই নির্ণয় করা যায়।

ধরা যাক $F_1(x_1, x_2, x_3)$ অপেক্ষকটি নিম্নে বর্ণিত সারণি দ্বারা সূচিত হ'ল।

x_1	x_2	x_3	$F_1(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

সারণি—6

সারণি-6 থেকে দেখা যাচ্ছে যে $F_1(0, 0, 0)=F_1(0, 0, 1)=F_1(0, 1, 1)$
$=F_1(1, 0. 0)=F_1(1, 1, 1)=1$ এবং $F_1(0, 1, 0)$
$=F_1(1, 0, 1)=F_1(1, 1, 0)=0$

ধরা যাক $F_1(x_1, x_2, x_3)$-এর যৌগিক স্বভাবী আকারটি হ'ল

$$F_1(x_1, x_2, x_3)=(m_0+s_0) . (m_1+s_1) . (m_2+s_2) . (m_3+s_3) . (m_4+s_4) . (m_5+s_5) . (m_6+s_6) . (m_7+s_7)$$

$\therefore (m_0+1)(m_1+1)(m_2+1)(m_3+1)(m_4+1)(m_5+1)(m_6+1)$
$(m_7+0)=1 \quad (\because \quad s_0=x_1'+x_2'+x_3'=1+1+1=1)$

অর্থাৎ $1.1.1.1.1.1.1.m_7=1 \quad (\therefore \quad 1+m_0=1+m_1=1$ ইত্যাদি).

অর্থাৎ $m_7=1$

একইভাবে পাই $m_1=0, m_2=0, m_5=0, m_0=m_4=m_3=m_6=1$

$$\therefore \quad F_1(x_1, x_2, x_3)=(1+s_0) . (0+s_1) . (0+s_2) . (1+s_3) . (1+s_4) . (0+s_5) . (1+s_6) . (1+s_7)=s_1\, s_2\, s_5$$
$$=(x_1'+x_2'+x_3) . (x_1'+x_2+x_3') . (x_1+x_2'+x_3).$$

অতএব সারণি-6 দ্বারা যে অপেক্ষকটি সূচিত হয়েছে তার যৌগিক স্বভাবী আকারটি হ'ল—

$$(x_1'+x_2'+x_3) . (x_1'+x_2+x_3') . (x_1+x_2'+x_3).$$

দুইটি বুলিয় অপেক্ষক (ধ্রুবক পদবিহীন) কখন অভিন্ন বা সমান হয় তা নিচের দুইটি উপপাদ্যে আলোচিত হবে।

উপপাদ্য 3. (i) যদি দুটি অপেক্ষকের বৈকল্পিক স্বভাবী আকারে উপস্থিত পদসমূহ অভিন্ন হয় তাহলে অপেক্ষক দুটি অভিন্ন বা সমান হবে।

(ii) বিপরীতক্রমে যদি দুটি অপেক্ষক অভিন্ন বা সমান হয় তাহলে উহাদের বৈকল্পিক নরম্যাল আকারে উপস্থিত পদসমূহ ও অভিন্ন বা সমান হবে।

প্রমাণঃ (i) যদি দুটি অপেক্ষকের বৈকল্পিক স্বভ্যবী আকারে একই পদসমূহ উপস্থিত থাকে তাহলে স্বতঃই অপেক্ষক দুটি অভিন্ন বা সমান হবে।

(ii) বিপরীতক্রমে, মনে করি অপেক্ষক দুটি অভিন্ন (অর্থাৎ একটি সরলীকরণের পর অপরটি পাওয়া যায়)। মনে কর $n\,(\geqslant 1)$ চল-বিশিষ্ট দুটি বুলিয় অপেক্ষক হ'ল $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ এবং $g(x_1, x_2, \cdots x_n)$. যেহেতু f ও g অভিন্ন, $f(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n) = g(a_1, a_2 \cdots a_n)$. $(a_i = 0$ বা $1)$. সম্পূর্ণ বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের ধর্ম-2 (পূর্বে প্রমাণিত) থেকে আমরা জানি যে স্বেচ্ছাধীন কিন্তু নির্দিষ্ট প্রকারে যদি n-সংখ্যক বুলিয় চলের প্রত্যেকটিতে 0 বা 1 মান দেওয়া হয় তাহলে চলগুলির সম্পূর্ণ বৈকল্পিক স্বভাবী আকারে একটি এবং কেবলমাত্র একটি পদের মান 1 হবে এবং বাকী পদগুলির মান 0 হবে। সুতরাং f বৈকল্পিক স্বভাবী আকারে যে সব পদ উপস্থিত থাকবে শুধু সেই পদগুলিই g অপেক্ষকের বৈকল্পিক স্বভাবী আকারেও উপস্থিত থাকবে। অতএব অপেক্ষক দুটির বৈকল্পিক স্বভাবী আকারে উপস্থিত পদসমূহ অভিন্ন।

উপপাদ্য-4 : (i) যদি দুটি অপেক্ষকের যৌগিক স্বভাবী আকার দুটিতে একই উৎপাদক সমূহ উপস্থিত থাকে তাহলে অপেক্ষক দুটি অভিন্ন বা সমান হবে।

(ii) বিপরীতক্রমে, যদি দুটি অপেক্ষক অভিন্ন বা সমান হয় তাহলে উহাদের যৌগিক স্বভাবী আকার দুটিতে উপস্থিত উৎপাদক সমূহও অভিন্ন হবে।

প্রমাণ : (i) যদি দুটি অপেক্ষকের যৌগিক স্বভাবী আকারে একই উৎপাদক উপস্থিত থাকে তাহলে স্বতঃই অপেক্ষক দুটি অভিন্ন বা সমান হবে।

(ii) বিপরীতক্রমে, মনে করি অপেক্ষক দুটি অভিন্ন।

যদি $f_1(x_1, x_2 \cdots x_n)$ এবং $g_1(x_1, x_2, \cdots x_n)$ দুটি n-চলবিশিষ্ট বুলিয় অপেক্ষক হয় তাহলে প্রদেয় শর্ত হতে পাই

$f_1(a_1, a_2, \cdots a_n) = g_1(a_1, a_2 \cdots a_n)$ যখন $a_i = 0$ বা 1, $i = 1, 2 \cdots n$. সম্পূর্ণ যৌগিক স্বভাবী আকারের ধর্ম থেকে আমরা জানি যে n-সংখ্যক বুলিয় চলের প্রত্যেকটিকে এক নির্দিষ্ট প্রকারে 0 বা 1 মান দেওয়া হয় তাহলে চলগুলির সম্পূর্ণ যৌগিক স্বভাবী আকারের একটিমাত্র পদের মান 0 এবং বাকী পদগুলির মান 1 হবে।

সুতরাং f_1 অপেক্ষকটির যৌগিক স্বভাবী আকারে সম্পূর্ণ যৌগিক স্বভাবী আকারের যে সব উৎপাদক উপস্থিত থাকবে শুধু সেই উৎপাদকগুলিই g_1 অপেক্ষকের যৌগিক স্বভাবী আকারেও উপস্থিত থাকবে। অতএব অপেক্ষক দুটির যৌগিক স্বভাবী আকারে উপস্থিত উৎপাদক সমূহ অভিন্ন।

বুলিয় অভেদ (Boolean Identity)

যদি এক চল-বিশিষ্ট দুটি বুলিয় অপেক্ষক $f(x)$ ও $g(x)$ এরূপ হয় যে x-এর সম্ভাব্য সকল মান-এর জন্য অপেক্ষক দুটির মান সমান হয় তখন $f(x) = g(x)$ সমীকরণটিকে এক চল-বিশিষ্ট **বুলিয় অভেদ** বলা হয়।

উদাহরণ। যদি $f(x) = x \cdot x + 1$ এবং $g(x) = x + 1$ হয় তাহলে $x \cdot x + 1 = x + 1$ একটি বুলিয় অভেদ। কারণ যদি $x = 0$ তাহলে $f(0) = 0.0 + 1 = 0 + 1 = 1$ এবং $g(x) = 0 + 1 = 1$

অর্থাৎ $f(0) = g(0)$. আবার যদি $x = 1$ হয় তাহলে $f(1) = 1.1 + 1$
$= 1 + 1 = 1$ এবং $g(1) = 1 + 1 = 1$ অর্থাৎ $f(1) = g(1)$.

$\therefore \quad f(x) = g(x)$ যদি $x = 0$ বা 1 হয়

অতএব $x.x + 1 = x + 1$ একটি বুলিয় অভেদ

অনুরূপভাবে যদি দুই চল-বিশিষ্ট অপেক্ষক $F(x_1, x_2)$ এবং $G(x_1, x_2)$, x_1 ও x_2'-র সম্ভাব্য সকল প্রকার মানের জন্য সমান হয় তাহলে $F(x) = G(x)$ একটি বুলিয় অভেদ হবে।

বুলিয় অপেক্ষকের পূরক (Complement of a Poolean Function)

যদি $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ এবং $f'(x_1, x_2, \cdots x_n)$ দুটি n-চলবিশিষ্ট অপেক্ষক এরূপ হয় যে

$$f+f'=1$$

$$\text{এবং } f \,.\, f'=0$$

সিদ্ধ তাহলে f' অপেক্ষকটিকে f-এর পূরক এবং f অপেক্ষকটিকে f'-এর পূরক বলা হয়।

পূরকের সংজ্ঞা থেকে সহজেই দেখানো যায় যে $(f')'=f$.

বুলিয় অপেক্ষকের পূরক নির্ণয় পদ্ধতি

I. প্রথম পদ্ধতি :

ডি-মরগ্যানের সূত্রের সাহায্যে যে কোন বুলিয় অপেক্ষকের পূরক সহজেই নির্ণয় করা যায়। এই পদ্ধতিতে দেখা যায় যে বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের কোন অপেক্ষকের পূরক হবে যৌগিক স্বভাবী আকারের একটি অপেক্ষক এবং যৌগিক স্বভাবী আকারের কোন অপেক্ষকের পূরক হবে বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের একটি অপেক্ষক।

উদাহরণ। (i) ধরা যাক,

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_3'\, x_2'\, x_1+x_3x_2x_1'+x_3x_2'\, x_1$$

$\therefore$ পূরক অপেক্ষক $f'(x_1, x_2, x_3)$

$$=\{x_3'\, x_2'\, x_1+x_3x_2x_1'+x_3x_2'\, x_1\}'$$

$$=(x_3'\, x_2'\, x_1)' \,.\, (x_3x_2x_1')' \,.\, (x_3x_2'\, x_1)'$$

$$=(x_3+x_2+x_1') \,.\, (x_3'+x_2'+x_1) \,.\, (x_3'+x_2+x_1').$$

অতএব বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের কোন অপেক্ষকের পূরক হবে যৌগিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষক।

(ii) ধরা যাক $f(x_1, x_2, x_3)$

$=(x_3'+x_2+x_1) \,.\, (x_3+x_2'+x_1) \,.\, (x_3+x_2+x_1')$ যৌগিক স্বভাবী আকারের একটি অপেক্ষক।

অতএব পূরক অপেক্ষক $f'(x_1, x_2, x_3)$

$$=\{(x_3'+x_2+x_1) \,.\, (x_3+x_2'+x_1) \,.\, (x_3+x_2+x_1')\}'$$

$$=(x_3'+x_2+x_1)'+(x_3+x_2'+x_1)'+(x_3+x_2+x_1')'$$

$$[\; \therefore \quad (ABC)'=A'+B'+C' \;]$$

$=x_3 \,.\, x_2' \,.\, x_1' + x_3' x_2 x_1' + x_3' x_2' x_1$

$[\because\ (A+B+C)' = A'.\,B'.\,C'$ এবং $(A')' = A\,]$

বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষক।

II. **দ্বিতীয় পদ্ধতিঃ** এই পদ্ধতিতে একটি বৈকল্পিক স্বভাবী আকারের অপেক্ষকের পূরক বৈকল্পিক স্বভাবী আকারেই পাওয়া যায়।

মনে কর, $f(x_1, x_2, x_3) = m_0 x_3' x_2' x_1' + m_1 x_3' x_2' x_1 + m_2 x_3' x_2 x_1' + m_3 x_3' x_2 x_1 + m_4 x_3 x_2' x_1' + m_5 x_3 x_2' x_1 + m_6 x_3 x_2 x_1' + m_7 x_3 x_2 x_1$ এই অপেক্ষকটির দিকে লক্ষ্য রেখে আর একটি অপেক্ষক $f'(x_3, x_2, x_1) = n_0 x_3' x_2' x_1' + n_1 x_3' x_2' x_1 + n_2 x_3' x_2 x_1' + n_3 x_3' x_2 x_1 + n_4 x_3 x_2' x_1' + n_5 x_3 x_2' x_1 + n_6 x_3 x_2 x_1' + n_7 x_3 x_2 x_1$ এমনভাবে তৈরী করতে হবে যাতে $m_i = 1$ হলে $n_i = 0$ হবে এবং $m_i = 0$ হলে $n_i = 1$ হবে।

$(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

তাহলে সহজেই দেখা যায় যে $f + f' = 1$

এবং $f \,.\, f' = 0$

অর্থাৎ f' অপেক্ষকটিই f-এর পূরক।

উদাহরণ। $f(x_1, x_2, x_3) = x_3' x_2' x_1' + x_3' x_2' x_1 + x_3' x_2 x_1 + x_3 x_2 x_1'$ অপেক্ষকটির পূরক বৈকল্পিক স্বভাবী আকারে প্রকাশ কর।

এক্ষেত্রে $m_0 = m_1 = m_3 = m_6 = 1,\ m_2 = m_4 = m_5 = m_7 = 0$

সুতরাং $n_0 = n_1 = n_3 = n_6 = 0.\ n_2 = n_4 = n_5 = n_7 = 1$

$\therefore\ f'(x_1, x_2, x_3) = n_0 x_1' x_2' x_3' + n_1 x_3' x_2' x_1 + n_2 x_3' x_2 x_1' + n_3 x_3' x_2 x_1 + n_4 x_3 x_2' x_1' + n_5 x_3 x_2' x_1 + n_6 x_3 x_2 x_1' + n_7 x_3 x_2 x_1 = x_3' x_2 x_1' + x_3 x_2' x_1' + x_3 x_2' x_1 + x_3 x_2 x_1.$

III. **তৃতীয় পদ্ধতিঃ** এই পদ্ধতি দ্বারা যৌগিক স্বভাবী আকারের পূরক যৌগিক স্বভাবী আকারেই পাওয়া যায়।

যদি $f(x_1, x_2, x_3)$ যৌগিক আকারের একটি অপেক্ষক হয় অর্থাৎ যদি $f(x_1, x_2, x_3) = \{m_0 + s_0\} \,.\, \{m_1 + s_1\} \,.\, \{m_2 + s_2\} \,.\, \{m_3 + s_3\} \,.\, \{m_4 + s_4\} \,.\, \{m_5 + s_5\} \,.\, \{m_6 + s_6\} \,.\, \{m_7 + s_7\}$ তাহলে পূরক অপেক্ষক হবে $f'(x_1, x_2, x_3)$

$= \{n_0 + s_0\} \,.\, \{n_1 + s_1\} \,.\, \{n_2 + s_2\} \,.\, \{n_3 + s_3\} \,.\, \{n_4 + s_4\} \,.\, \{n_5 + s_5\} \,.\, \{n_6 + s_6\} \,.\, \{n_7 + s_7\}.$

এক্ষেত্রে $n_i = 1$ হবে যদি $m_i = 0$ হয় এবং $n_i = 0$ হবে যদি $m_i = 1$ হয়, ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$).

উদাহরণ। যদি $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3' + x_2' + x_1) \cdot (x_3' + x_2 + x_1) \cdot (x_3 + x_2' + x_1)$ হয়

তাহলে $m_0 = m_3 = m_4 = m_6 = m_7 = 0$ এবং $m_1 = m_2 = m_5 = 1$.

$\therefore \quad n_0 = n_3 = n_4 = n_6 = n_7 = 1$ এবং $n_1 = n_2 = n_5 = 0$

$$\therefore f'(x_1, x_2, x_3) = (x_3' + x_2' + x_1')(x_3' + x_2 + x_1)(x_3 + x_2' + x_1') \cdot (x_3 + x_2 + x_1') \cdot (x_3 + x_2 + x_1).$$

2.6. বুলিয় অপেক্ষকের সরলীকরণ (Simplification of Boolean Function)

আমরা পূর্বেই জেনেছি যে a, b, c যদি কোন বুলিয় অ্যালজেব্রার $(B, +, \cdot, ')$ যে কোন তিনটি পদ হয় এবং $\underline{0}$ ও $\underline{1}$ যদি '+' ও '.' সাপেক্ষে শূন্য ও এককপদ হয় তাহলে নিম্নলিখিত ধর্মগুলি Bতে সিদ্ধ হয় :

1. $a + b = b + a$
   $a \cdot b = b \cdot a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
   $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$
4. $a + \underline{0} = a$
   $a \cdot \underline{1} = a$
5. $a + a = a$
   $a \cdot a = a$
6. $a + \underline{1} = \underline{1}$
   $a \cdot \underline{0} = \underline{0}$
7. $(a')' = a$
8. $(a + b)' = a' \cdot b'$
   $(a \cdot b)' = a' + b'$
9. $a + a \cdot b = a$
   $a \cdot (a + b) = a$
10. $\underline{0}' = 1$
    এবং $\underline{1}' = 0$

এই দশটি ধর্মের সীমিত সংখ্যক প্রয়োগ দ্বারা সসীম চল-বিশিষ্ট ধ্রুবক পদ বিহীন যে কোন অপেক্ষককে অপেক্ষাকৃত সরল আকারে পরিণত করা সম্ভব হয়।

উদাহরণ। মনে কর, $f(x, y, z)=xy'z'+xy'z+xyz'+xyz+x.(y+z)+x'$

$$\therefore\ f(x, y, z)=xy'(z+z')+xy(z+z)+x.(y+z)+x'$$
$$=xy'.1+xy.1+x(y+z)+x'$$
$$=xy'+xy+x.(y+z)+x'$$
$$=x(y'+y)+x(y+z)+x'$$
$$=x+xy+xz+x'$$
$$=(x+xy)+(x+xz)+x$$
$$=x+x+x'$$
$$=x+x'$$
$$=1$$

[এই উদাহরণে সরলীকরণের যে পদ্ধতি অনুসরণ করা হয়েছে তা কোন সুনির্দিষ্ট পদ্ধতি নয়। গত দুই দশকে বুলিয় অপেক্ষকের সরলীকরণের উপর বহু গবেষণানিবন্ধ প্রকাশিত হয়েছে; এঁদের মধ্যে Quine এবং Mc Clukey'র অবদান সর্বাধিক উল্লেখযোগ্য।]

উদাহরণমালা

1. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকগুলির বৈকল্পিক আকার এবং যৌগিক আকার* নির্ণয় কর।

(i) $x+x'y$ (ii) $xyz+(x+y)(x+z)$.

উত্তর: (i) ধরা যাক $f(x, y)=x+x'y$, $f(x, y)$ দুটি চল x ও y-এর অপেক্ষক।

* পরবর্তী আলোচনায় বৈকল্পিক ও যৌগিক আকার বলতে বৈকল্পিক স্বভাবী আকার ও যৌগিক স্বভাবী আকারের কথা বোঝাবে।

বৈকল্পিপ আকার :

$$f(x, y)=x+x'y$$
$$=x \,.\, 1+x'y$$
$$=x \,.\, (y+y')+x'y$$
$$=x \,.\, y+x \,.\, y'+x'y$$

যৌগিক আকার :

$$f(x, y)=x+x'y$$
$$=(x+x') \,.\, (x+y)$$
$$=1 \,.\, (x+y)$$
$$=(x+y).$$

(ii) এখানে $f(x, y, z)=xyz+(x+y)(x+z)$ তিনটি চল-বিশিষ্ট অপেক্ষক।

$$f(x, y, z)=xyz+(x+y)(x+z)$$
$$=xyz+x+yz$$
$$=xyz+x+yz$$
$$=xyz+x \,.\, 1 \,.\, 1+yz \,.\, 1$$
$$=xyz+x \,.\, (y+y')(z+z')+yz(x+x')$$
$$=xyz+x \,.\, \{yz+yz'+y'z+y'z'\}+xyz+x'yz$$
$$=xyz+xyz+xyz'+xy'z+xy'z'+xyz+x'yz$$
$$=xyz+xyz'+xy'z+xy'z'+x'yz \quad (\because\ xyz+xyz+xyz=xyz)$$

ইহাই অপেক্ষকটির বৈকল্পিক আকার।

যৌগিক আকার :

$$f(x, y, z)=xyz+(x+y)(x+z)$$
$$=(xyz+x+y) \,.\, (xyz+x+z)$$
$$=\{(x+y)+xyz\} \,.\, (x+z+xyz)$$
$$=(x+y+x)(x+y+yz) \,.\, (x+z+x)(x+z+yz)$$
$$=(x+y) \,.\, (x+y)(x+z)(x+z) \left(\because\ \begin{array}{l} y+yz=y \\ z+yz=z \end{array}\right)$$

$$=(x+y)(x+z)$$
$$=(x+y+\underline{0})(x+z+\underline{0})$$
$$=(x+y+zz').(x+z+yy')$$
$$=(x+y+z)(x+y+z')(x+z+y)(x+z+y')$$

2. নিম্নে বর্ণিত সারণি দ্বারা একটি অপেক্ষক $f(x, y, z)$ সূচিত হয়েছে। অপেক্ষকটির বৈকল্পিক আকার এবং যৌগিক আকার নির্ণয় কর :

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

উত্তর : উপরিবর্ণিত সারণি থেকে আমরা দেখি যে

$f(0, 0, 0)=f(0, 1, 0)=f(0, 1, 1)=f(1, 1, 1)=0$

এবং $f(0, 0, 1)=f(1, 0, 0)=f(1\ 0, 1)=f(1, 1, 0)=1$

বৈকল্পিক আকার :

মনে কর, বুলিয় অপেক্ষকটির বৈকল্পিক আকার হ'ল

$f(x_3, x_2, x_1)=m_0x_3'\ x_2'\ x_1'+m_1x_3'\ x_2'\ x_1+m_2x_3'\ x_2\ x_1'$
$+m_3x_3'\ x_2\ x_1+m_4x_3\ x_2'\ x_1'+m_5x_3\ x_2'\ x_1+m_6x_3\ x_2\ x_1'$
$+m_7x_3\ x_2\ x_1$

যেহেতু $f(0, 0, 0)=0, \quad \therefore\ m_0=0$

একইভাবে আমরা পাই $m_2=m_3=m_7=0$

এবং $m_1=m_4=m_5=m_6=1$

$\therefore$ অপেক্ষকটির বৈকল্পিক আকার হ'ল—

$$f(x_3, x_2, x_1)=x_3'\ x_2'\ x_1+x_3\ x_2'\ x_1'+x_3\ x_2'\ x_1+x_3\ x_2\ x_1'$$

যৌগিক আকার :

মনে কর, বুলিয় অপেক্ষকটির যৌগিক আকার হ'ল

$$f(x_3, x_2, x_1=\{m_0+(x_3'+x_2'+x_1')\}\,.\,\{m_1+(x_3'+x_2'+x_1)\}.$$
$$\{m_2+(x_3'+x_2+x_1')\}\,.\,\{m_3+(x_3'+x_2+x_1)\}\,.$$
$$\{m_4+(x_3+x_2'+x_1')\}\,.\,\{m_5+(x_3+x_2'+x_1)\}\,.$$
$$\{m_6+(x_3+x_2+x_1')\}\,.\,\{m_7+(x_3+x_3+x_1\ \}$$

যেহেতু $f(0, 0, 0)=0$, অতএব

$$f(0, 0, 0)=0=\{m_0+1+1+1\}\ \{m_1+1+1+0\}$$
$$.\,\{m_2+1+0+1\}\,.\,\{m_3+1+0+0\}\,.\,\{m_4+0+1+1\}$$
$$.\,\{m_5+0+1+0\}\,.\,\{m_6+0+0+1\}$$
$$\{m_7+0+0+0\}$$

অর্থাৎ $0=(m_0+1)\ (m_1+1).(m_2+1)(m_3+1)(m_4+1).$

$$(m_5+1)\,.\,\{m_6+1)\,.\,m_7$$
$$=1\,.\,1\,.\,1\,.\,1\,.\,1\,.\,1\,.\,1\,.\,m_7=m_7$$

$\therefore\ m_7=0.$

অনুরূপভাবে $m_5=m_4=m_0=0$ [যেহেতু $f(0, 1, 0)=f(0, 1, 1)$ $=f(1, 1, 1)=0$]

এবং $m_1=m_2=m_3=m_6=1$ [যেহেতু $f(1, 1, 0)=f(1, 0, 1)$ $=f(1, 0, 0)=f(0, 0, 1)=1$]

$\therefore$ অপেক্ষকটির যৌগিক আকার হচ্ছে—

$$f(x_3, x_2, x_1)=(x_3'+x_2'+x_1')\,.\,(x_3+x_2'+x_1')$$
$$(x_3+x_2'+x_1)\,.\,(x_3+x_2+x_1)$$

3. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকগুলির পূরক অপেক্ষক যৌগিক আকারে নির্ণয় কর :—

(i) $f(x, y, z, w)=x'y'z'w+xyzw'+x'y'zw$

(ii) $f(x_3, x_2, x_1)=x_3'x_2'x'_1+x_3'x_2x_1+x_3x_2x_1$

(iii) $f(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)=x_5'x_4'x_3'x_2'x'_1+x_5x_4x_3$

উত্তর : (i) এখানে f বৈকল্পিক আকারে দেওয়া আছে। অতএব ডি-মরগ্যানের সূত্র অর্থাৎ প্রথম পদ্ধতি প্রয়োগ করে নির্ণেয় আকার পাওয়া যাবে।

$$f'=\{x'y'z'w+xyzw'+x'y'zw\}'$$
$$=(x'y'z'w)'.(xyzw')'.(x'y'zw)'$$
$$=(x+y+z+w').(x'+y'+z'+w).(x+y+z'+w')$$

(ii) অনুরূপে $f'=(x_3+x_2+x_1').(x_3+x_2'+x_1').$
$(x_3'+x_2'+x_1')$

(iii) $f(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)=x_5'x_4'x_3'x_2'x_1+x_5x_4x_3$

$$f(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)=x_5'x_4'x_3'x_2'x_1'+x_5x_4x_3.(x_2+x_2').(x_1+x_1')$$

$$=x_5'x_4'x_3'x_2'x_1'+x_5x_4x_3x_2x_1+x_5x_4x_3x_2x_1'+x_5x_4x_3x_2'x_1+x_5x_4x_3x_2'x_1'$$

∴ f বৈকল্পিক আকারে পাওয়া গেল।

∴ এক্ষেত্রে প্রথম পদ্ধতি প্রযোজ্য।

$$f'(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)=[x_5'x_4'x_3'x_2'x_1'+x_5x_4x_3x_2x_1+x_5x_4x_3x_2x_1'+x_5x_4x_3x_2'x_1+x_5x_4x_3x_2'x_1']'$$

$$=(x_5+x_4+x_3+x_2+x_1).(x_5'+x_4'+x_3'+x_2'+x_1').(x_5'+x_4'+x_3'+x_2'+x_1).(x_5'+x_4'+x_3'+x_2+x_1').(x_5'+x_4'+x_3'+x_2+x_1)$$

4. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকগুলির পূরক অপেক্ষকগুলি বৈকল্পিক আকারে নির্ণয় কর—

(i) $f(x, y, z, w)=(x+y+z+w)(x+y'+z'+w)(x'+y+z+w')$

(ii) $f x, y, z)=x(x+y+z')(x'+y+z)(x+y'+z)$

উত্তর ঃ (i) অপেক্ষকটি যৌগিক আকারে দেওয়া আছে।

$\therefore$ প্রথম পদ্ধতি প্রয়োগ করলে f' অপেক্ষকটি বৈকল্পিক আকারে পাওয়া যাবে।

$$f'(x, y, z, w)=\{(x+y+z+w)(x+y'+z'+w) . (x'+y+z+w')\}'$$

$$=x'y'z'w'+x'yzw'+xy'z'w$$

(ii) প্রথমে অপেক্ষকটি যৌগিক স্বভাবী আকারে প্রকাশ করব।

$f(x, y, z)=x'x+y+z') . (x'+y+z) . (x+y'+z)$

যেহেতু $x=x+yy'=(x+y)(x+y')=(x+y+zz')(x+y'+zz')$

$$=(x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z)(x+y'+z')$$

$$\therefore \quad f(x, y, z)=(x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z)(x+y'+z')(x'+y+z)$$

$\therefore$ প্রথম পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই

$f=x'y'z'+x'y'z+x'yz'+x'yz+xy'z'$

5. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকগুলির পূরক অপেক্ষকগুলি বৈকল্পিক আকারে নির্ণয় কর—

(i) $f(x, y, z)=xyz+x'y'z'$

(ii) $f(x, y, z, w)=x'y'z'w'+x'y'zw+x'yz'w+x'yzw'$
$+xy'z'w+xy'zw'+xyz'w'+xyzw$

উত্তর : (i) এক্ষেত্রে $m_0=m_7=1$

এবং $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=0$

অতএব পূরক অপেক্ষক

$$f'(x, y, z)=n_0x'y'z'+n_1x'y'z+n_2x'yz'+n_3x'yz+n_4xy'z'+n_5xy'z+n_6xyz'+n_7xyz$$

এক্ষেত্রে $n_0=n_7=0$ এবং $n_1=n_2=n_3=n_4=n_5=n_6=1$

$\therefore \quad f'=x'y'z+x'yz'+x'yz+xy'z'+xy'z+xyz'$

(ii) মনে কর

$$f(x, y, z, w)=m_0x'y'z'w'+m_1x'y'z'w+m_2x'y'zw'$$
$$+m_3x'y'zw+m_4x'yz'w'+m_5x'yz'w+m_6x'yzw'$$
$$+m_7x'yzw+m_8xy'z'w'+m_9xy'z'w+m_{10}xy'zw'$$
$$+m_{11}xy'zw+m_{12}xyz'w'+m_{13}xyz'w$$
$$+m_{14}xyzw'+m_{15}xyzw$$

তাহলে $m_0=m_3=m_5=m_6=m_9=m_{10}=m_{12}=m_{15}=1$,

$$m_1=m_2=m_4=m_7=m_8=m_{11}=m_{13}=m_{14}=0.$$

∴ পূরক অপেক্ষক

$$f'(x, y, z, w)=n_0x'y'z'w'+n_1x'y'z'w+n_2x'y'zw'$$
$$+n_3x'y'zw+n_4x'yz'w'+n_5x'yz'w$$
$$+n_6x'yzw'+n_7x'yzw+n_8xy'z'w'+n_9xy'z'w$$
$$+n_{10}xy'zw'+n_{11}xy'zw+n_{12}xyz'w'+n_{13}xyz'w$$
$$+n_{14}xyzw'+n_{15}xyzw$$

যখন $n_0=n_3=n_5=n_6=n_9=n_{10}=n_{12}=n_{15}=0$

এবং $n_1=n_2=n_4=n_7=n_8=n_{11}=n_{13}=n_{14}=1$

অর্থাৎ $f'=x'y'z'w+x'y'zw'+x'yz'w+x'yzw+xy'z'w'$

$$+xy'zw+xyz'w+xyzw'$$

[এই অংক দুটিতে দ্বিতীয় পদ্ধতি প্রয়োগ করা হ'ল।]

6. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকটির পূরক অপেক্ষক যৌগিক আকারে নির্ণয় কর—

$$f(x, y, z)=(x'+y'+z')\,(x'+y+z)\,.\,(x+y'+z)$$

উত্তর ঃ মনে কর—

$$f(x, y, z)=\{m_0+x'+y'+z'\}\,.\,\{m_1+(x'+y'+z)\}\,.$$
$$\{m_2+(x'+y+z')\}\,.\,\{m_3+(x'+y+z)\}\,.$$
$$\{m_4+(x+y'+z')\}\,.\,\{m_5+(x+y'+z)\}\,.$$
$$\{m_6+(x+y+z')\}\,.\,\{m_7+(x+y+z)\}$$

এবং পূরক অপেক্ষক $f'(x, y, z)=\{n_0+x'+y'+z')\}$.
$\{n_1+(x'+y'+z)\}$. $\{n_2+(x'+y+z')\}$. $\}n_3+(x'+y+z)\}$.
$(n_4+(x+y'+z')\}$. $\{n_5+(x+y'+z)\}$. $\{n_6+(x+y+z')\}$.
$\}n_7+(x+y+z)\}$

তাহলে $m_0=m_3=m_5=0$, $m_1=m_2=m_4=m_6=m_7=1$

অতএব $n_0=n_3=n_5=1$, $n_1=n_2=n_4=n_6=n_7=0$

অর্থাৎ $f'(x, y, z)=(x'+y+z\ (x'+y+z')(x+y'+z')(x+y+z')$
$(x+y+z)$

(এখানে তৃতীয় পদ্ধতি প্রয়োগ করা হ'ল)

7. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকটি বৈকল্পিক্ আকার থেকে যৌগিক আকারে রূপান্তরিত কর—

$f(x, y, z)=x'y'z'+x'y'z+x'yz'+xy'z'+xyz$

উত্তর ঃ এক্ষেত্রে দ্বিতীয় পদ্ধতি প্রয়োগ করে অপেক্ষকটির পূরক f' বৈকল্পিক আকারে প্রকাশ করব এবং তারপর প্রথম পদ্ধতিপ্রয়োগ করে f'-এর পূরক $(f')'$ অর্থাৎ fকে যোগিক আকারে প্রকাশ করব।

মনে কর $f(x, y, z)=m_0x'\ y'\ z'+m_1\ x'\ y'\ z+m_2\ x'\ y\ z'$
$+m_3\ x'\ y\ z+m_4\ x\ y'\ z'+m_5xy'\ z+m_6xyz'+m_7xyz$

এবং $f'(x, y, z)=n_0\ x'\ y'\ z'+n_1\ x'\ y'\ z+n_2\ x'\ y\ z'+n_3\ x'\ y\ z$
$+n_4\ x\ y'\ z'+n_5\ x\ y'\ z+n_6\ x\ y\ z'+n_7\ x\ y\ z$

তাহলে $m_0=m_1=m_2=m_4=m_7=1$, $m_3=m_5=m_6=0$

অতএব $n_0=n_1=n_2=n_4=n_7=0$, $n_3=n_5=n_6=1$

অর্থাৎ $f'=x'\ y\ z+x\ y'\ z+x\ y\ z'$.

এবার প্রথম পদ্ধতি (ডি-মরগ্যানের সূত্র) প্রয়োগ করে পাই,

$(f')'=f=\{x'\ y\ z+x\ y'\ z+x\ y\ z'\}'$
$=(x+y'+z')\ .\ (x'+y+z')\ .\ (x'+y'+z)$.

8. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকটিকে যৌগিক আকার থেকে বৈকল্পিক আকারে রূপান্তরিত কর—

$f(x, y, z)=(x'+y'+z)(x'+y+z')\ .\ (x+y'+z)\ .\ (x+y+z')$

উত্তর ঃ এক্ষেত্রে প্রথমে তৃতীয় পদ্ধতি প্রয়োগ করে অপেক্ষকটির পূরক f' যৌগিক আকারে এবং তারপর প্রথম পদ্ধতি প্রয়োগ করে f'-এর পূরক $(f')'$ অর্থাৎ f-কে বৈকল্পিক আকারে নির্ণয় করা হবে।

মনে কর $f(x, y\ z)=\{m_0+(x'+y'+z')\}.\{m_1+(x'+y'+z)\}.\{m_2+(x'+y+z')\}.\{m_3+(x'+y+z)\}.\{m_4+(x+y'+z')\}.\{m_5+(x+y'+z)\}.\{m_6+(x+y+z')\}.\{m_7+(x+y+z)\}$

এবং $f'(x, y, z)=\{n_0+(x'+y'+z')\}.\{n_1+(x'+y'+z)\}.\{n_2+(x'+y+z')\}.\{n_3+(x'+y+z)\}.\{n_4+x+y'+z')\}.\{n_5+(x+y'+z)\}.\{n_6+(x+y+z')\}.\{n_7+(x+y+z)\}$

তাহলে $m_0=m_3=m_4=m_7=1$. $m_1=m_2=m_5=m_6=0$

অতএব $n_0=n_3=n_4=n_7=0, \quad n_1=n_2=n_5=n_6=1$

$\therefore \quad f'=(x'+y'+z')(x'+y+z)(x+y'+z')\ x+y+z)$

এবার প্রথম পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই—

$$(f')'=f=xyz+x\ y'\ z'+x'\ y\ z+x'\ y'\ z'$$

দ্রষ্টব্য ঃ f-এর বৈকল্পিক আকার আরও কম সংখ্যক চলের বৈকল্পিক আকারে পরিণত করা যেতে পারে—

যেমন $f=(x+x').yz+(x+x')\ y'z'$
$=\underline{1}.yz+\underline{1}.y'z'$
$=yz+y'z'.$

লক্ষ্য কর এই বৈকল্পিক আকারে x চলটি অনুপস্থিত।

9. যদি $\underline{0}$ এবং $\underline{1}$ যথাক্রমে একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা (B, +, ., ')-এর শূন্যপদ এবং এককপদ হয় এবং $f(x, y, z)$ এই এ্যালজেব্রার পরিপ্রেক্ষিতে তিনটি বুলিয় চল x, y, z-এর যে কোন ধ্রুবক পদবিহীন অপেক্ষক হয়, তাহলে দেখাও যে

$$f(x, y, z)=f(\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})\ x'\ y'\ z'+f(\underline{0}, \underline{0}, \underline{1})\ x'\ y'\ z +f(\underline{0}, \underline{1}, \underline{0},)\ x'\ yz'+f(\underline{0}, \underline{1}, \underline{1})\ x'\ y\ z+f(\underline{1}, \underline{0}, \underline{0})\ x\ y'\ z' +f(\underline{1}, \underline{0}, \underline{1})\ x\ y'\ z+f(\underline{1}, \underline{1}, \underline{0})\ x\ y\ z'+f(\underline{1}, \underline{1}, \underline{1})\ xyz$$

উত্তর ঃ মনে কর $f(x, y, z)$

$$=m_0\ x'\ y'\ z'+m_1\ x'\ y'\ z+m_2\ x'\ y\ z'+m_3\ x'\ y\ z+m_4\ x\ y'\ z' +m_5\ x\ y'\ z+m_6\ x\ y\ z'+m_7\ xyz$$

$\therefore \quad f(\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}) = m_0.\underline{1}.\underline{1}.\underline{1} + m_1\, \underline{1}.\underline{1}.\underline{0} + m_2\, \underline{1}.\underline{0}.\underline{1} + m_3.\underline{1}.\underline{0}.\underline{0}$
$\qquad + m_4.\underline{0}.\underline{1}.\underline{1} + m_5.\underline{0}.\underline{1}.\underline{0} + m_6.\underline{0}.\underline{0}.\underline{1} + m_7.\underline{0}.\underline{0}.\underline{0} = m_0.$

এইভাবে আমরা প্রমাণ করতে পারি

$f(\underline{0}, \underline{0}, \underline{1}) = m_1,\ f(\underline{0}, \underline{1}, \underline{0}) = m_2,\ f(\underline{0}, \underline{1}, \underline{1}) = m_3,\ f(\underline{1}, \underline{0}, \underline{0}) = m_4,$
$f(\underline{1}, \underline{0}, \underline{1}) = m_5,\ f(\underline{1}, \underline{1}, \underline{0}) = m_6,\ f(\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}) = m_7.$

অতএব $f(x, y, z) = f(\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})\, x'\, y'\, z' + f(\underline{0}, \underline{0}, \underline{1})\, x'\, y'\, z$
$+ f(\underline{0}, \underline{1}, \underline{0})\, x'\, y\, z' + f(\underline{0}, \underline{1}, \underline{1})\, x'\, y\, z + f(\underline{1}, \underline{0}, \underline{0})\, x\, y'\, z'$
$+ f(\underline{1}, \underline{0}, \underline{1})\, x\, y'\, z + f(\underline{1}, \underline{1}, \underline{0})\, x\, y\, z' + f(\underline{1}, \underline{1}, \underline{1})\, xyz.$

10. প্রমাণ কর দুইটি চলের বুলিয় অপেক্ষকের সর্বসমেত সংখ্যা (total number) হচ্ছে 2^{2^2} অর্থাৎ 16.

উত্তর: মনে কর অপেক্ষকটি

$f(x, y) = m_0\, x'\, y' + m_1\, x'\, y + m_2\, xy' + m_3\, xy.$

যেহেতু m_0 দুটি মান $\underline{0}$ এবং $\underline{1}$ গ্রহণ করতে পারে,

m_1 " " " " " " " " ,

m_2 " " " " " " " " ,

এবং m_3 " " " " " " " " ,

অতএব সকল সম্ভাব্য দুইটি চলের অপেক্ষকের সংখ্যা $2 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 2^4 = 16.$

11. দুইটি চলের 16টি সম্ভাব্য অপেক্ষক লেখ।

উত্তর: পূর্ববর্তী উদাহরণ দ্রষ্টব্য।

(m_0, m_1, m_2, m_3)-র সকল সম্ভাব্য মান হ'ল:

$(\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}),\ (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{1}),\ (\underline{0}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{0}),\ (\underline{0}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{1}),\ (\underline{0}, \underline{1}, \underline{0}, \underline{0}),$
$(\underline{0}, \underline{1}, \underline{0}, \underline{1}),\ (\underline{0}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{0})\ (\underline{0}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}),\ (\underline{1}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}),\ (\underline{1}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{1}),\ (\underline{1}, \underline{0},$
$\underline{1}, \underline{0}),\ (\underline{1}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{1}),\ (\underline{1}, \underline{1}, \underline{0}, \underline{0}),\ (\underline{1}, \underline{1}, \underline{0}, \underline{1}),\ (\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{0}),\ (\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1})$

$\therefore$ সকল সম্ভাব্য দুইটি চলের অপেক্ষকগুলি হল,

$\underline{0},\ xy,\ xy',\ xy' + xy,\ x'y,\ x'y + xy,\ x'y + xy',\ x'y + xy' + xy,$

$x'y',\ xy' + xy,\ x'y' + xy',\ x'y' + xy' + xy,\ x'y' + x'y,$

$x'y' + x'y + xy,\ x'y' + x'y + xy',\ \underline{1}$

13. $f(x, y, z)$ তিনটি চল x, y, z-এর একটি অপেক্ষক। যদি দুই বা ততোধিক চলের মান $\underline{1}$ হ'লে অপেক্ষকটির মান $\underline{1}$ হয় এবং অন্যান্য ক্ষেত্রে অপেক্ষকটির মান $\underline{0}$ হয় তাহলে অপেক্ষকটি নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ আমরা জানি

$$f(x, y, z)=f(\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})\, x'\, y'\, z'+f(\underline{0}, \underline{0}, \underline{1})\, x'\, y'\, z+f(0, \underline{1}, \underline{0})\, x'yz'$$
$$+f(\underline{0}, \underline{1}, \underline{1})\, x'\, y\, z+f(\underline{1}, \underline{0}, \underline{0})\, x\, y'\, z'+f(\underline{1}, \underline{0}, \underline{1})\, x\, y'\, z$$
$$+f(\underline{1}, \underline{1}, \underline{0})\, x\, y\, z'+f(\underline{1}, \underline{1}, \underline{1})\, x\, y\, z$$ (উদাহরণ 9 দেখ)

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী $f(0, \underline{1}, \underline{1})=f(\underline{1}, \underline{0}, \underline{1})=f(\underline{1}, \underline{1}, \underline{0})=f(\underline{1}, \underline{1}, \underline{1})=\underline{1}$

এবং $f(\underline{0}, \underline{0}, \underline{0})=f(\underline{0}, \underline{0}, \underline{1})=f(\underline{0}, \underline{1}, \underline{0})=f(\underline{1}, \underline{0}, \underline{0})=\underline{1}$

অতএব $f(x, y, z)=x'\, y\, z+xy'z+xy\, z'+xyz.$

14. সরল কর :

(i) $f(x, y, z)=x'\, y'\, z'+x'\, y'\, z+x'\, y\, z'+x'\, y\, z$

(ii) $f(x, y, z, w)=(x+xy+xyz+xyzw)(x+y+z+w)$

(iii) $f(x, y, z, w)=(x+y)'(xzw+xzw'+xz'w+xz'w')$

(iv) $f(x, y, z)=xyz(x'+xy'+xyz')$

(v) $f(x, y, z)=(x+y+xz)\, y'+(xz')y'+(x'+y+z')'$

উত্তর ঃ (i) $f(x, y, z)=x'y'(z'+z)+x'y(z'+z)$

$$=x'\, y'\,.\,1+x'\, y\,.\,\underline{1}=x'\, y'+x'\, y$$
$$=x'(y'+y)=x'\,.\,\underline{1}=x'$$

(ii) $f(x, y, z, w)=(x+xy+xyz+xyzw)(x+y+z+w)$

$$=x.$$

যেহেতু $x+xy=x$; $x+xy+xyz=x+xyz=x$;

$$x+xy+xyz+xyzw=x+xyzw=x$$

এবং $x\,.\,(x+y+z+w)=x$

(iii) $f(x, y, z, w)=(x+y)\,.\,\{xz(w+w')+xz'\,.\,(w+w')\}$

$$=(x+y)\,.\,\{xz\,.\,\underline{1}+xz'\,.\,\underline{1}\}$$
$$=(x+y)\,.\,\{xz+xz'\}$$
$$(x+y)\,.\,x(z+z')=(x+y)\,.\,(x\,.\,\underline{1})$$
$$=(x+y)\,.\,x=x\,.\,(x+y)=x$$

(iv) $f(x, y, z) = xx'yz + x\,x\,y.y'.z + x.x.y.y.z.z'$

$$= \underline{0} + \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

(v) $f(x, y, z) = (x + y + xz)\,y' + (xz')\,y' + (x' + y + z')'$

$$= (x + y)\,y' + xy'z' + x.y'.z$$

$$= xy' + \underline{0} + xy'\,z' + x\,y'.z$$

$$= xy' + xy'(z' + z)$$

$$= xy' + xy'.\underline{1} = xy' + xy'$$

$$= xy'.$$

প্রশ্নমালা 2(b)

1. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকগুলিকে ন্যূনতম সংখ্যক চলের বৈকল্পিক স্বভাবী আকারে প্রকাশ কর :

(i) $f(x, y, z) = xy' + xz + xy$

(ii) $f(x\ y, z, t) = (x'y + xyz' + xy'z + x'y'z't + t')'$

(iii) $f(x, y, z) = (x + y')(y + z')(z + x')(x' + y')$

(iv) $f(x, y, z) = (x + y)(x + y')(x' + z)$

(v) $f(x, y, z) = x'yz + xy'z' + x'y'z + x'yz' + xy'z + x'y'z'$.

(vi) $f(x, y, z, t) = xyz + yzt$.

(vii) $f(x, y, z) = \{(x + y + z)'\,yz\}' + x'y + xy'$.

2. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকগুলিকে ন্যূনতম সংখ্যক চলের যৌগিক স্বভাবী আকারে প্রকাশ কর :

(i) $f(x, y, z) = (xy' + xz)' + x'$

(ii) $f(x, y, z) = (x + y')(y + z')(z + x')(x' + y')$

(iii) $f(x, y, z) = (x + y)(x + y')(x' + z)$

(iv) $f(x, y, z) = (x'y + xyz' + xy'z + x'y'z't + t')'$

3. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকগুলিকে তিনটি চল x, y, z-এর যৌগিক স্বভাবী আকারে প্রকাশ কর :

(a) $(x + y)(x' + y')$ (b) x (c) $x'z + xz'$ (d) $x + y'$

4. নিম্নে বর্ণিত সারণি দ্বারা একটি অপেক্ষক $f(x, y, z)$ সূচিত হয়। অপেক্ষকটির বৈকল্পিক আকার ও যৌগিক আকার নির্ণয় কর:

x	y	z	$f(x\ y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

5. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকগুলির পূরক অপেক্ষকগুলি যৌগিক আকারে এবং বৈকল্পিক আকারে প্রকাশ কর:

(i) $f(x, y, z, w)=x'y'z'w'+x'y'zw+xyz'w'+xyzw$

(ii) $f(x_3, x_2, x_1)=(x_3+x_2+x_1)(x_3'+x_2'+x_1')$

(iii) $f(x, y, z)=(x+y+z)(x'+y'+z')$

(vi) $f(x, y, z)=(x'+y+z)(x+y'+z)(x+y+z')(x'+y'+z')$

(v) $f(x, y)=(x+y)(x'+y)(x'+y')$

6. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকগুলি বৈকল্পিক আকার থেকে যৌগিক আকারে রূপান্তরিত কর:

(i) $f(x, y)=xy+x'y+x'y'$

(ii) $f(x, y. z)=xyz+xy'z'+x'yz'+x'y'z+x'y'z'$

(iii) $f(x, y, z, t)=x'y'z't'+x'yz't+x'yzt'+xy'z't+xy'zt'$
$+xyzt$

7. নিম্নে বর্ণিত অপেক্ষকগুলি যৌগিক আকার থেকে বৈকল্পিক আকারে রূপান্তরিত কর :

(i) $f(x, y)=(x+y')(x'+y)(x'+y')$

(ii) $f(x, y, z)=(x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z)(x'+y+z').(x'+y'+z)(x'+y'+z')$.

8. $f(x, y, z)$ তিনটি বুলিয় চল x, y, z-এর একটি অপেক্ষক। যদি দুইটি বা ততোধিক চলের মান $\underline{0}$ হয় তাহলে অপেক্ষকটির মান 1 হয় এবং অন্যান্য ক্ষেত্রে অপেক্ষকটির মান $\underline{1}$ হয়। অপেক্ষকটির বৈকল্পিক আকার এবং যৌগিক আকার নির্ণয় কর।

9. চারটি চল x, y, z, w-এর সম্পূর্ণ বৈকল্পিক আকার (অপেক্ষক) টি নির্ণয় কর।

$x=\underline{1}$. $y=\underline{1}$, $z=\underline{0}$, $t=\underline{1}$ হলে কোন পদের মান $\underline{1}$ এবং কোনগুলির মান $\underline{0}$ হয় ?

10. প্রমাণ কর যে n-সংখ্যক চলের 2^{2^n} সংখ্যক বুলিয় অপেক্ষক আছে।

11. সরল আকারে প্রকাশ কর :

(i) $f(x, y, z)=xy'z+(x'+y+z)(x+y+z')$

(ii) $f(x, y, z)=x'[y(x+y'+z)+z'(xy+xy'+x'y'+x'y')]$

(iii) $f(x, y, z, t)=\{(x+y)'z'+(x+z)'y'+(y+z)'t'\}\{y+z+t\}'$

(iv) $f(x, y, z, t)=x'y'z't'+xyzt+x'y'zt+x'y'z't+xy'zt+x'yzt+x'y'z't+x'y'zt'$

(v) $f(a, b, c, d)=(ab+ab'+a'b)'.(a'b'+cd)$

(vi) $f(a, b, c)=abc(a+ab+a'b'c')$

(vii) $f(x, y, z)=x+x'y+xy'z+(x+y'+z)(x'+y+z')$.

12. যদি $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_3'x_4'$ এবং $g(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1'x_2'x_3'x_4'+x_1x_2x_3'x_4'$ হয় তাহলে আর একটি অপেক্ষক $h(x_1, x_2, x_3, x_4)$ নির্ণয় কর যাতে $f=g+h$ হয়।

তৃতীয় অধ্যায়

গাণিতিক ন্যায় (Mathematical Logic)

বা

প্রতীকী ন্যায় (Symbolic Logic)

যুক্তি ও বিচারের বিভিন্ন পদ্ধতির বিশ্লেষণ হ'ল ন্যায় বা যুক্তি শাস্ত্রের মুখ্য উদ্দেশ্য। ন্যায় বা যুক্তি শাস্ত্রে যদি যুক্তি ও বিচারের জন্য চিহ্ন ও প্রতীকের বহুল প্রয়োগ হয় তাহলে সেই শাস্ত্রকে প্রতীকী ন্যায় বা গাণিতিক ন্যায় বলা হয়। বিজ্ঞানে ও বিশেষভাবে গণিতের নানা শাখায় যেখানে যুক্তি ও বিচারের সাহায্যে কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হতে হয় তখন প্রতীকী ন্যায়-এর ব্যবহার অপরিহার্য হয়ে উঠে। এজন্য এই অধ্যায়ে প্রতীকি ন্যায়ের কয়েকটি মূল ধারণা দেওয়া হয়েছে। এইসঙ্গে সেট তত্ত্ব ও বুলিয় অ্যালজেব্রার সাহায্যে দেখানো হয়েছে যে প্রতীকী ন্যায় শাস্ত্রে প্রতিজ্ঞা সমূহ একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা গঠন করে। বিখ্যাত দার্শনিক অ্যারিষ্টোটল (Aristotle) গাণিতিক ন্যায়ের প্রথম সূত্রপাত করেন এবং সপ্তদশ শতকে বিখ্যাত জর্মন দার্শনিক ও গণিতজ্ঞ গট্‌ফ্রেড্ লাইবনিৎস (Gotfred Leibnitz) এই শাস্ত্রের গোড়াপত্তন করেন। পরে উনবিংশ শতাব্দীতে জর্জ বুল (George Boole ; 1815—1864), অগাষ্টাস ডি-মরগ্যান (Augustus De-morgan ; 1806—1871), জন্ ভেন্ (John Venn ; 1848—1923), গট্‌লেব ফ্রেগে (Gotleb Frege ; 1848—1925) বার্ট্রাণ্ড রাসেল (Bertrand Russell ; 1872—1972) প্রভৃতি মনীষীরা প্রতীকী ন্যায়ে মূল্যবান গবেষণার স্বাক্ষর রেখে যান।

§3·1. প্রতিজ্ঞা (Proposition) :

ভাষার মাধ্যমে মানুষ তার ভাবনা ও চিন্তা প্রকাশ করে। যে সব বিবৃতি বা উক্তির দ্বারা ভাবনা ও চিন্তাগুলিকে প্রকাশ করা হয় তাদের গঠন প্রকৃতি ও ভাবার্থ বিশ্লেষণ করে এদের কয়েকটি ভাগে ভাগ করা সম্ভব। বিবৃতি বা বর্ণনামূলক উক্তি বা নৈসর্গিক ঘটনা ইত্যাদি যা বাক্যের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। এই সকলকে প্রধানতঃ দুটি ভাগে বিভক্ত করা

হয়। যদি বাক্যের ভাষাগত রূপটি থেকে বাক্যটি 'সত্য' কি 'অসত্য' নিরূপণ করা সম্ভব হয় তাহলে বাক্যটিকে **প্রতিজ্ঞা** (proposition) বলা হয়। অপরদিকে যদি বাক্যটির বিবৃতিগত অর্থ থেকে বাক্যটি 'সত্য' কি 'অসত্য' নিরূপণ করা সম্ভব না হয় তাহলে সেই বাক্যটিকে প্রতিজ্ঞা বলা হয় না। যেমন 'রামানুজম্ বিশ্ববিখ্যাত গণিতজ্ঞ ছিলেন' বাক্যটির বিবৃতিগত রূপটি থেকে বলা সম্ভব হচ্ছে যে বাক্যটি সত্য ; সুতরাং এই বাক্যটিকে প্রতিজ্ঞা বলা যায়। আবার 'মঙ্গল গ্রহের জীবরা দীর্ঘকায়' বাক্যটি সত্য কি অসত্য তা সঠিকভাবে বলা যাচ্ছে না ; কেন না এই গ্রহ সম্বন্ধে এখনও আমাদের ধারণা সুস্পষ্ট নয়। সুতরাং বাক্যটি সত্য কি অসত্য তা সঠিকভাবে বলা বর্তমানে সম্ভব নয়। কিন্তু বাক্যটি একটি প্রতিজ্ঞা ; কেন না এটি হয় সত্য বা অসত্য হবে। পরবর্তীকালে যখন গ্রহটি সম্পর্কে সম্পূর্ণ তথ্য পাওয়া যাবে তখন বলা সম্ভব যে বাক্যটি সত্য কি অসত্য। এছাড়া আরও অনেক বাক্য আছে যাদের বিবৃতিগত অর্থটি থেকে বাক্যটিকে সত্য বলে মনে হয় কিন্তু বাক্যটির অন্তর্নিহিত অর্থটি থেকে বাক্যটি অসত্য মনে হয়। এ ধরনের বাক্যকে প্রতিজ্ঞা বলা যাবে না। কেননা কোন বাক্যকে প্রতিজ্ঞা হতে হলে বাক্যটি হয় সত্য কিংবা অসত্য হবে ; উভয় সম্ভাবনা যুগপৎ থাকলে চলবে না। যেমন 'যে বাক্যটি তুমি পড়ছো' তা অসত্য এই বাক্যটির বিবৃতিগত অর্থ টি যদি অসত্য ভাবা হয় তাহলে এর অন্তর্নিহিত অর্থ টি পর্যালোচনা করে দেখা যায় যে বাক্যটি সত্য। সুতরাং এই বাক্যটি প্রতিজ্ঞা নয়।

নীচে কয়েকটি বাক্য দেওয়া হল :

1. / মৌলিক সংখ্যা নয়।
2. ভারতবর্ষ কৃষি প্রধান দেশ।
3. আলোক এক প্রকার শক্তি।
4. পৃথিবী চন্দ্রের উপগ্রহ।
5. দেহ গঠনে ও পুষ্টিতে প্রোটিনের স্থান সর্বপ্রথম।
6. $x^2+y^2=(x+y)^2$ ।
7. বরফ ঠাণ্ডা।
8. নির্দিষ্ট আকৃতি ও আয়তনযুক্ত পদার্থকে কঠিন পদার্থ বলে।
9. সত্যজিৎ রায় বিশ্ববিখ্যাত চিত্র পরিচালক।

লক্ষ্য কর এই বাক্যগুলির প্রত্যেকটি প্রতিজ্ঞা; কেন না বাক্যগুলি সত্য কি অসত্য তা সঠিকভাবে বলা সম্ভব হচ্ছে!

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ (1) সেট তত্ত্বের ভাষায় প্রতিজ্ঞাকে এভাবে প্রকাশ করা যায়:

ধর P হ'ল সকল বাক্যের সেট এবং Q হ'ল সেই সকল বাক্যের সেট যাদের ধর্ম হ'ল বাক্যটির অর্থ হয় 'সত্য' কিংবা 'অসত্য' হবে (উভয়েই একসঙ্গে নয়)। অতএব Q সেট P সেটের প্রকৃত উপসেট অর্থাৎ $P \subset Q$.

(2) বাক্যটি সত্য কি অসত্য তা নিরূপণ করা অনেক সময় দুরূহ মনে হয়। প্রকৃত পক্ষে 'সত্যতা' বা 'অসত্যতা'র ধারণা অনেকাংশে আপেক্ষিক এবং তা ব্যক্তিবিশেষের জ্ঞানের উপর নির্ভরশীল। এজন্য 'প্রতিজ্ঞা'. 'সত্য' ও 'অসত্য' এই পদগুলির কোন সংজ্ঞা দেওয়া হয় না এবং এগুলিকে তর্কশাস্ত্রে অসংজ্ঞেয় পদ হিসেবে গণ্য করা হয়।

গণিতে x, y, z ইত্যাদি সংখ্যার প্রতীকরূপে গণ্য করা হয়, A, B, C. D ইত্যাদি জ্যামিতিতে বিন্দুর প্রতীক হিসেবে ব্যবহৃত হয়। আবার P, Q, A, B ইত্যাদি দ্বারা সেটকে প্রকাশ করা হয়। প্রতীকী ন্যায়ে p, q, r · ইত্যাদি ছোট বর্ণগুলিকে প্রতিজ্ঞার প্রতীক ধরা হয়।

যেমন, 'পণ্ডিত রবিশংকর বিশ্ববিখ্যাত সেতার শিল্পী' প্রতিজ্ঞাটিকে p দ্বারা সূচিত করা যায় এবং এভাবে তা লেখা হয়।

p : পণ্ডিত রবিশংকর বিশ্ববিখ্যাত সেতার শিল্পী।

বা, p = পণ্ডিত রবিশংকর বিশ্ববিখ্যাত সেতার শিল্পী।

সরল প্রতিজ্ঞা (Simple proposition) ও **মিশ্র প্রতিজ্ঞা** (Compound proposition):

যে প্রতিজ্ঞায় শুধু একটি উদ্দেশ্য ও একটি বিধেয় পদ বর্তমান তাকে **সরল প্রতিজ্ঞা** বলা হয়। যেমন 'রবীন্দ্রনাথ নোবল পুরস্কার লাভ করেন।' এই প্রতিজ্ঞাটিতে উদ্দেশ্য হ'ল 'রবীন্দ্রনাথ' এবং 'নোবল পুরস্কার লাভ করেন' বিধেয়।

যে বাক্যের মধ্যে একাধিক সরল প্রতিজ্ঞা সুপ্ত থাকে তাকে **মিশ্র প্রতিজ্ঞা** বলে। অর্থাৎ মিশ্র প্রতিজ্ঞাকে বিশ্লেষণ করলে দুই বা ততোধিক সরল প্রতিজ্ঞা পাওয়া যায়।

নীচে কয়েকটি সরল ও মিশ্র প্রতিজ্ঞার উদাহরণ দেওয়া হ'ল :

(a) গোলাপ ফুল লাল।

(b) মানুষের রক্ত ঠাণ্ডা।

(c) ১৯৭৪ খৃষ্টাব্দের ১৮ই মে ভারতবর্ষ প্রথম আণবিক বিস্ফোরণ ঘটায়।

(d) আজ বৃষ্টি হবে।

(e) লৌহ কঠিন পদার্থ এবং পারদ তরল পদার্থ।

(f) অশোক পরীক্ষায় পাশ করবে অথবা ফেল করবে।

(g) গরমের ছুটিতে আমি পুরীতে কিংবা দীঘায় বেড়াতে যাব।

(h) সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি কোণ সমান এবং প্রতিটির পরিমাপ হ'ল 60°।

(i) সকল আয়তক্ষেত্র বর্গক্ষেত্র নয়।

(j) কোন যুগ্ম সংখ্যা অযুগ্ম সংখ্যার সমান নয়।

(k) ইহা সত্য নয় যে বরফ ঠাণ্ডা।

এই বাক্যগুলির প্রথম চারটি বাক্য হ'ল সরল প্রতিজ্ঞা এবং বাকী বাক্যগুলি মিশ্র প্রতিজ্ঞা। প্রতিটি মিশ্র প্রতিজ্ঞা বিশ্লেষণ করলে দুটি সরল প্রতিজ্ঞা পাওয়া যাবে। লক্ষ্য কর যে মিশ্র প্রতিজ্ঞাগুলিতে 'এবং' 'বা' (অথবা'), প্রভৃতি অব্যয় পদগুলি দুটি সরল বচনকে যুক্ত করেছে। এই বিশেষ পদগুলিকে সংযোজক বা যোজক (connective) বলা হয়।

যেমন 'লৌহ কঠিন পদার্থ' 'পারদ তরল পদার্থ' এই প্রতিজ্ঞা দুটি 'এবং' সংযোজক দ্বারা যুক্ত হয়ে 'লৌহ কঠিন পদার্থ এবং পারদ তরল পদার্থ' মিশ্র প্রতিজ্ঞাটি গঠিত হয়েছে।

অনুরূপ ভাবে দেখা যায় যে (f) বাক্যটিতে 'অথবা', (g) বাক্যে 'কিংবা', (h) বাক্যে 'এবং', ইত্যাদি পদগুলি সংযোজক রূপে ব্যবহৃত হয়েছে। এছাড়া 'বরফ ঠাণ্ডা' প্রতিজ্ঞাটিতে 'ইহা সত্য নয় এই অতিরিক্ত পদগুলির সংযোগ ঘটিয়ে (h) বচনটি পাওয়া যায়।

প্রতিজ্ঞার সত্যমান (Truth value of propositions) :

একটি বাক্যকে প্রতিজ্ঞা বলা হয় যদি বাক্যটির দুটি মান (value) 'সত্য' কিংবা 'অসত্য' থাকা সম্ভব হয়। এই দুটিমানকে প্রতিজ্ঞার সত্যমান (Truth value) বলা হয়। অর্থাৎ কোন প্রতিজ্ঞার সত্যমান হয় 'সত্য'

কিংবা 'অসত্য' হবে, উভয়েই একই সঙ্গে হওয়া সম্ভব নয়। যদি প্রতিজ্ঞার সত্য মান 'সত্য' হয় তাহলে T বা '1' দ্বারা তা সূচিত করা হয় এবং সত্যমান যদি 'অসত্য' হয় তাহলে F বা 0 দ্বারা তা সূচিত করা হয়।

যদি কোন বাক্যের সত্যমান T বা F কিছুই না হয় তাহলে এ ধরনের বাক্যকে প্রতিজ্ঞা বলা সম্ভব নয়। যেমন—'কি সুন্দর ছবি।' 'তুমি কি পূজোর ছুটিতে আমাদের বাড়িতে বেড়াতে আসবে?' 'তুমি এখানে এস' —বাক্যগুলির সত্যমান কিছু নেই। এজন্য এই বাক্যগুলিকে প্রতিজ্ঞা বলা চলে না।

§3.2. যৌক্তিক সংযোজক (Logical connectives) :

তর্কশাস্ত্রে যে সকল পদ দ্বারা এক বা একাধিক সরল প্রতিজ্ঞার সংযুক্তি ঘটান হয় এবং ফলে আর একটি নূতন প্রতিজ্ঞা পাওয়া সম্ভব হয় সেই পদগুলিকে যৌক্তিক সংযোজক (Logical connectives) বলা হয়। এই ধরনের তিনটি মূখ্য যোজক হল :

(i) নয় বা না (Not),

(ii) এবং (And),

(iii) বা / অথবা (Either—Or).

(i) নেতিকরণ (Negation) :

ধর p একটি সরল প্রতিজ্ঞা। 'নয়' বা 'না' যোজকটি ব্যবহার করে p নয় (not p) এই নূতন প্রতিজ্ঞাটি পাওয়া যায়। 'p নয়' এই প্রতিজ্ঞাটিকে p এর নঞর্থক প্রতিজ্ঞা বলা হয়। সুতরাং p প্রতিজ্ঞার নেতিকরণে 'p নয়' প্রতিজ্ঞাটি পাওয়া যায়। যদি p দ্বারা 'গোপাল বুদ্ধিমান' প্রতিজ্ঞাটিকে সূচিত করা হয় তাহলে 'p নয়' প্রতিজ্ঞা বা p-এর নঞর্থক প্রতিজ্ঞাকে এভাবে প্রকাশ করা যায়। 'গোপাল বুদ্ধিমান নয়', 'ইহা অসত্য যে গোপাল বুদ্ধিমান', 'একথা সত্য নয় যে গোপাল যুদ্ধিমান'। নেতিকরণের পর যে প্রতিজ্ঞাটি পাওয়া যায় তাদের নানা বাক্য দ্বারা প্রকাশ করা সম্ভব হয় কিন্তু লক্ষ্য রাখতে হবে যাতে নঞর্থক প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান মূল প্রতিজ্ঞাটির সত্যমানের বিপরীত হয়। p-এর নঞর্থক প্রতিজ্ঞাকে p' বা $\sim p$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সাধারণত 'নয়' বা 'না' পদটি মূল প্রতিজ্ঞাটির সহিত যোগ করে

নঞর্থক প্রকিজ্ঞাটি পাওয়া যায়। যেহেতু নঞর্থক প্রতিজ্ঞাকে বিভিন্ন প্রকারে প্রকাশ করা যায় সেজন্য সত্যমানের সহায়তায় নঞর্থক প্রতিজ্ঞার সংজ্ঞা দেওয়া হয়। যদি p-এর সত্যমান T হয় তাহলে p' বা $\sim p$-এর সত্যমান হবে F এবং যদি p-এর সত্যমান F হয় তাহলে p' বা $\sim p$-এর সত্যমান হবে T.

উদাহরণ। (i) ধর p : কয়লা থেকে বিদ্যুৎ পাওয়া যায়।

$\therefore$ p' (বা $\sim p$) : কয়লা থেকে বিদ্যুৎ পাওয়া যায় না।

(ii) ধর p : ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore$ p' : ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ নয়।

যদি $p, q, r \cdots$ইত্যাদি সকল প্রতিজ্ঞা নিয়ে একটি সেট গঠন করা হয় তাহলে p', q', r' ইত্যাদি প্রতিজ্ঞাগুলি $p, q, r \cdots$ইত্যাদির নঞর্থক প্রতিজ্ঞা। যেহেতু $p', q', r' \cdots$ ইত্যাদি এক একটি প্রতিজ্ঞা, সুতরাং এরা সকলেই প্রতিজ্ঞা সমূহ নিয়ে গঠিত সেটের পদ হবে। অতএব নেতিকরণকে একটি প্রক্রিয়া ভাবা যায়। লক্ষ্য কর যে এই প্রক্রিয়ার জন্য শুধু একটি পদ (এক্ষেত্রে প্রতিজ্ঞা)-এর প্রয়োজন। সুতরাং নেতিকরণ প্রক্রিয়াটিকে একপদী প্রক্রিয়া বলা যায়।

(ii) **সংযোগ** (Conjunction) :

যদি দুটি সরল প্রতিজ্ঞা p ও q 'এবং' যোজক দ্বারা যুক্ত হয়ে একটি মিশ্র প্রতিজ্ঞা গঠন করে তাহলে 'p এবং q' প্রতিজ্ঞাটিকে p ও q-এর সংযোগ (Conjunction) বলা হয়। এই মিশ্র প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান যদি সরল প্রতিজ্ঞা p ও q-এর সত্যমানের সহিত তুলনা করা হয় তাহলে 'এবং' যোজকটির সংজ্ঞা পাওয়া যায়।

যদি p সত্য হয়, q সত্য হয় তাহলে 'p এবং q' সত্য,
যদি p সত্য হয়, q অসত্য হয় তাহলে 'p এবং q' অসত্য,
যদি p অসত্য হয়, q সত্য হয় তাহলে 'p এবং q' অসত্য,
যদি p অসত্য হয়, q অসত্য হয় তাহলে 'p এবং q' অসত্য।

সুতরাং p ও q সরল প্রতিজ্ঞা দুটির সকল সম্ভাব্য সত্যমানের জন্য 'p এবং q' মিশ্র প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান 'সত্য' কিংবা অসত্য হবে। 'p এবং q'-কে $p \wedge q$ অথবা $p \cdot q$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ 'এবং' এর স্থলে '$\wedge$' চিহ্নটি ব্যবহৃত হয়।

উদাহরণঃ (i) p : রহিম বুদ্ধিমান, q : অমিত চৌকষ খেলোয়াড়,

$\therefore$ 'p এবং q' বা $p \wedge q$—রহিম বুদ্ধিমান এবং অমিত চৌকষ খেলোয়াড়।

যদি রহিম বুদ্ধিমান হয় তাহলে p প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান T এবং যদি অমিত চৌকষ খেলোয়াড় হয় তাহলে q-এর সত্যমান T ; সুতরাং $p \wedge q$-এর সত্যমান হবে T, আবার যদি p-এর সত্যমান T এবং q-এর সত্যমান F হয় তাহলে $p \wedge q$-এর সত্যমান হবে F. অনুরূপ ভাবে যদি p-এর সত্যমান F হয় এবং q-এর সত্যমান T হয় তাহলে $p \wedge q$ এর সত্যমান হবে F এবং সবশেষে p ও q-এর সত্যমান যদি F হয় তাহলে $p \wedge q$ এর সত্যমান হবে F। অতএব p ও q-এর সকল প্রকার সত্যমানের জন্য $p \wedge q$-এর সত্যমান হয় T কিংবা F.

যদি প্রতিজ্ঞা সমূহের সেটকে P দ্বারা সূচিত হয় এবং যদি $p, q \in P$ তাহলে $p \wedge q$ ও P সেটের অন্তর্ভূক্ত কেন না $p \wedge q$ একটি প্রতিজ্ঞা। অতএব '$\wedge$'-কে একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া বলা যায়।

(iii) **বিকল্প (Disjunction) :**

'অথবা' কিংবা 'বা' যোজকটি দুটি অর্থে ব্যবহৃত হয়। যেমন—'গরমের ছুটিতে বিভাস সিমলা অথবা উতকামণ্ডে বেড়াতে যাবে' এই মিশ্র বাক্যটিতে 'অথবা' যোজকটি যে অর্থে ব্যবহৃত তার দ্বারা সিমলা কিংবা উতকামণ্ডে বেড়াতে যাবার কথা বলা হচ্ছে, উভয় স্থানে যাওয়ার কথা বলা হচ্ছে না। অথবা (OR)-এর এই ব্যবহারকে ইংরেজীতে Exclusive or এর ব্যবহার বলে। আবার 'মানুষের চাঁদে পাড়ি দেওয়ার কথা খবরের কাগজে অথবা রেডিওতে শুনেছি' মিশ্র বাক্যটিতে 'অথবা' যোজকটি যে অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে তার দ্বারা চাঁদে পাড়ি দেওয়ার কথা রেড়িওতে বা খবরের কাগজ উভয়েতে পাওয়া সম্ভব। এক্ষেত্রে 'অথবা' যোজকটি Inclusive বা অর্থে ব্যবহৃত হতে পারে। সুতরাং p ও q যদি দুটি সরল প্রতিজ্ঞা হয় তাহলে **p অথবা q**-এর দুটি অর্থ দেখা যায়—(i) **p অথবা q**-এর অর্থ—হয় p, কিংবা q. কিন্তু p, q উভয়েই নয়।

(ii) **p অথবা q**-এর অর্থ—হয় p, কিংবা q, কিংবা p, q উভয়েই। প্রতীকী তর্ক বিদ্যায় p অথবা q Exclusive অর্থে ব্যবহৃত হবে এবং $p \vee q$ দ্বারা তা সূচিত করা হবে।

যদি p ও q দুটি সরল প্রতিজ্ঞা হয় তাহলে $p \vee q$ একটি মিশ্র প্রতিজ্ঞা। $p \vee q$-কে p ও q-এর বিকল্প প্রতিজ্ঞা (Disjuuction of p and q) বলা হয়। $p \vee q$-এর সংজ্ঞা এভাবে দেওয়া হয় :

(i) $p \vee q$-এর সত্যমান T হবে যদি p ও q উভয়ের সত্যমান T হয়।

(ii) $p \vee q$-এর সত্যমান T হবে যদি p-এর সত্যমান T এবং q-এর সত্যমান F হয়,

(iii) $p \vee q$-এর সত্যমান T হবে যদি p-এর সত্যমান F এবং q-এর সত্যমান T হয়,

(iv) $p \vee q$-এর সত্যমান F হবে যদি p, q উভয়ের সত্যমান F হয়।

$p \vee q$-কে p ও q-এর **বিকল্প প্রতিজ্ঞা** বলা হয় এবং অনেক সময় $p+q$ দ্বারা তা প্রকাশ করা হয়।

লক্ষ্য কর যে 'অথবা' যোজকটি P সেটের উপর প্রয়োগ করা যায় এমন একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

পূর্বের আলোচনা হতে দেখা যায় যে যদি $p, q \in P$ তাহলে $p \wedge q$, $p \vee q$ এবং $\sim p$ (বা p') সকলেই P সেটের পদ। সুতরাং '$\wedge$' ও '$\vee$' প্রক্রিয়া দুটি দ্বিপদী এবং '/' প্রক্রিয়াটি একপদী।

নীচে যোজকগুলির নাম, যোজকের প্রতীক এবং যোজকের অর্থ তালিকা আকারে দেখানো হ'ল।

যোজকের নাম	যোজকের প্রতীক	যোজকের অর্থ
I. 'এবং'	$\wedge$, (.)	p এবং q
II. অথবা	$\vee$, (+)	হয় p কিংবা q
III. 'নয়'	$\sim$. (')	p নয়

উদাহরণ

1. ধর, p—মানুষ অভ্যাসের দাস।

q—সকল মানুষই মরণশীল।

এই প্রতিজ্ঞা দুটি হতে $p \vee q$, $p \wedge q$, $\sim p$, $\sim q$ প্রতিজ্ঞাগুলি যথোপযুক্ত ভাষায় এভাবে প্রকাশ করা যায় :

$p \vee q$—মানুষ অভ্যাসের দাস অথবা সকল মানুষই মরণশীল।

$p \wedge q$—মানুষ অভ্যাসের দাস এবং সকল মানুষই মরণশীল।

p' (বা $\sim p$)—মানুষ অভ্যাসের দাস নয়, (বা একথা ঠিক নয় যে মানুষ অভ্যাসের দাস।)

q' (বা $\sim q$)—সকল মানুষই মরণশীল নয়, (বা একথা ঠিক নয় যে সকল মানুষই মরণশীল।)

2. ধর, p—সোনালী ডাক টিকিট সংগ্রহ করে।

q—পিনাকী অভিনয়ে দক্ষ।

$p \vee q$ বা $p+q$—সোনালী ডাক টিকিট সংগ্রহ করে অথবা পিনাকী অভিনয়ে দক্ষ।

$p \vee q$ বা $p \cdot q$—সোনালী ডাক টিকিট সংগ্রহ করে এবং পিনাকী অভিনয়ে দক্ষ।

p' (বা $\sim p$)—সোনালী ডাক টিকিট সংগ্রহ করে না, বা ইহা সত্য নয় যে সোনালী ডাক টিকিট সংগ্রহ করে।

q' (বা $\sim q$)—পিনাকী অভিনয়ে দক্ষ নয়, (বা একথা সত্য নয় যে পিনাকী অভিনয়ে দক্ষ।)

$\sim(p \vee q)$—একথা সত্য নয় যে সোনালী ডাক টিকিট সংগ্রহ করে অথবা পিনাকী অভিনয়ে দক্ষ।

§ 3·3. বন্ধনী ও তার প্রয়োগ ঃ

বন্ধনীর প্রয়োগ গণিতে সরলীকরণ বিষয়ক প্রশ্নাবলীতে বেশী দেখা যায়। সাধারণত কোন রাশিমালায় যদি দুই বা ততোধিক দ্বিপদ প্রক্রিয়া আরোপিত হয় তাহলে রাশিমালাটি একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা সূচিত করে না। এক্ষেত্রে বন্ধনীর প্রয়োজন হয়। যেমন $12+8\div 2$ এই রাশিমালায় দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '$+$' এবং '$\div$' আরোপিত হয়েছে এবং রাশিমালাটির মান সঠিকভাবে নির্ধারণ করা যাচ্ছে না। বন্ধনী প্রয়োগ করলে $12+(8\div 2)=12+4=16$ এবং $(12+8)\div 2=20\div 2=10$. সুতরাং $12+8\div 2$ এই গাণিতিক তথ্যটি দ্ব্যর্থ বোধক (ambiguous) এবং এর নির্দিষ্ট মান বন্ধনীর বিশেষ ব্যবহারের উপর নির্ভরশীল।

প্রতীকী তর্ক বিদ্যায় প্রতিজ্ঞা সমূহকে $p, q, r\cdots$ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয় এবং '$\wedge$', '$\vee$' এই চিহ্নগুলিকে দ্বিপদ প্রক্রিয়া, '$\sim$' চিহ্নকে একপদী প্রক্রিয়া ভাবা হয়। যদি কোন মিশ্র প্রতিজ্ঞায় দুই বা ততোধিক

প্রক্রিয়ার ব্যবহার হয় তাহলে বন্ধনীর প্রয়োজন হয়। যেমন $p \vee q \wedge r$ এই মিশ্র প্রতিজ্ঞাটিকে $p \vee (q \wedge r)$ অথবা $(p \vee q) \wedge r$ ভাবা যায়। সুতরাং $p \vee q \wedge r$ মিশ্র প্রতিজ্ঞাটি দ্ব্যর্থ বোধক। মিশ্র প্রতিজ্ঞাটি নির্দিষ্ট অর্থ বহন করে যদি বন্ধনীর ব্যবহার করা হয়।

p ও q যদি সরল প্রতিজ্ঞা হয় তাহলে দুই বা ততোধিক সংযোজক ব্যবহার করে এবং বন্ধনীর সাহায্যে অনেক জটিল মিশ্র প্রতিজ্ঞা গঠন করা সম্ভব। যেমন $p' \wedge q, p \wedge q', p' \wedge q', p \vee (q \wedge r), (p \vee q) \wedge r, p \vee (q \vee r)$. এখন কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে দুটি প্রতিজ্ঞা থেকে যে সকল মিশ্র প্রতিজ্ঞা তৈরী করা যায় তার কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল।

উদাহরণ 1. ধর p=জ্যামিতি গণিতের একটি প্রাচীন শাখা।
q=পশ্চিমবঙ্গে শিক্ষিত বেকারের সংখ্যা অনেক বেশী।

p ও q দ্বারা সংযোজক ও বন্ধনীর সাহায্যে নিম্নলিখিত মিশ্র প্রতিজ্ঞাগুলি গঠন করা যায়।

(a) $p \wedge q$ =জ্যামিতি গণিতের একটি প্রাচীন শাখা **এবং** পশ্চিমবঙ্গে শিক্ষিত বেকারের সংখ্যা অনেক বেশী।

(b) $p \vee q$=জ্যামিতি গণিতের একটি প্রাচীন শাখা **বা** পশ্চিমবঙ্গে শিক্ষিত বেকারের সংখ্যা অনেক বেশী।

(c) $p \wedge (\sim q)=p \wedge q'$=জ্যামিতি গণিতের একটি প্রাচীন শাখা এবং পশ্চিমবঙ্গে শিক্ষিত বেকার সংখ্যায় অনেক বেশী নয়।

(d) $(\sim p) \wedge q=p' \wedge q$=জ্যামিতি গণিতের একটি প্রাচীন শাখা নয় এবং পশ্চিমবঙ্গে শিক্ষিত বেকার অনেক বেশী।

(e) $(\sim p) \vee (\sim q)=p' \wedge q'$=জ্যামিতি গণিতের একটি প্রাচীন শাখা নয় এবং পশ্চিমবঙ্গে শিক্ষিত বেকার সংখ্যায় অনেক বেশী নয়।

(f) $(\sim p) \vee q=p' \vee q$=জ্যামিতি গণিতের একটি প্রাচীন শাখা নয় অথবা পশ্চিমবঙ্গে শিক্ষিত বেকারের সংখ্যা অনেক বেশী।

(g) $p \vee (\sim q)=p \vee q'$=জ্যামিতি গণিতের একটি প্রাচীন শাখা অথবা পশ্চিমবঙ্গে শিক্ষিত বেকারের সংখ্যা অনেক বেশী নয়।

(h) $(\sim p) \vee (\sim q)=p' \vee q'$=জ্যামিতি গণিতের প্রাচীন শাখা নয় বা পশ্চিমবঙ্গে শিক্ষিত বেকারের সংখ্যা অনেক বেশী নয়।

(i) $\sim(p \vee q)=(p \vee q)'$=ইহা সত্য নয় যে জ্যামিতি গণিতের প্রাচীন শাখা বা পশ্চিমবঙ্গে বেকারের সংখ্যা অনেক বেশী।

(j) $\sim(p \wedge q)=(p \wedge q)'$=একথা ঠিক নয় যে জ্যামিতি গণিতের প্রাচীন শাখা এবং পশ্চিমবঙ্গে শিক্ষিত বেকারের সংখ্যা অনেক বেশী।

(k) $\sim(\sim p)=(p')'$=ইহা অসত্য যে জ্যামিতি গণিতের প্রাচীন শাখা নয়।

(l) $\sim(\sim p \wedge \sim q)=(p' \wedge q')'$=ইহা অসত্য যে জ্যামিতি গণিতের প্রাচীন শাখা নয় এবং পশ্চিমবঙ্গে শিক্ষিত বেকারের সংখ্যা অনেক বেশী নয়।

2. ধর, p=সঙ্গীত প্রেমিক ব্যক্তিরা সহৃদয়।

q=চিন্তাশীল ব্যক্তিরা নিরামিষাশী।

r=বর্তমানে যুবকেরা বয়স্কদের সম্মান দেখায় না।

$\therefore$ $p \wedge q$=সঙ্গীত প্রেমিক ব্যক্তিরা সহৃদয় এবং চিন্তাশীল ব্যক্তিরা নিরামিষাশী।

$p \wedge q \wedge r$=সঙ্গীত প্রেমিক ব্যক্তিরা সহৃদয় এবং চিন্তাশীল ব্যক্তিরা নিরামিষাশী এবং বর্তমানে যুবকেরা বয়স্কদের সম্মান দেখায় না।

$p \vee q \vee r$=সঙ্গীত প্রেমিক ব্যক্তিরা সহৃদয় বা চিন্তাশীল ব্যক্তিরা নিরামিষাশী বা বর্তমানে যুবকেরা বয়স্কদের সম্মান দেখায় না।

$(p \wedge q) \wedge r$=সঙ্গীত প্রেমিক ব্যক্তিরা সহৃদয় এবং চিন্তাশীল ব্যক্তিরা নিরামিষাশী এবং বর্তমানে যুবকেরা বয়স্কদের সম্মান দেখায় না।

$p' \wedge q \wedge r$=সঙ্গীত প্রেমিক ব্যক্তিরা সহৃদয় নয় এবং চিন্তাশীল ব্যক্তিরা নিরামিষাশী এবং বর্তমানে যুবকেরা বয়স্কদের সম্মান দেখায় না।

$p' \vee q' \vee r$=সঙ্গীত প্রেমিক ব্যক্তিরা সহৃদয় নয় বা চিন্তাশীল ব্যক্তিরা নিরামিষাশী নয় বা বর্তমানে যুবকেরা বয়স্কদের সম্মান দেখায় না।

$(p \vee q)'$=একথা সত্য নয় যে সঙ্গীত প্রেমিক ব্যক্তিরা সহৃদয় বা চিন্তাশীল ব্যক্তিরা নিরামিষাশী।

$(p \wedge q)'$=একথা সত্য নয় যে সঙ্গীত প্রেমিক ব্যক্তিরা সহৃদয় এবং চিন্তাশীল ব্যক্তিরা নিরামিষাশী।

3. p=A, B, C বিন্দুত্রয় একরেখীয় (collinear)।

q=l, m, n সরলরেখাত্রয় একবিন্দুগামী (concurrent)।

তিনটি সংযোজক ও বন্ধনীর সাহায্যে নিম্নলিখিত মিশ্র প্রতিজ্ঞাগুলিকে প্রতীক আকারে প্রকাশ কর।

(*a*) A, B, C একরেখীয় এবং l, m, n রেখাগুলি এক বিন্দুগামী।

(*b*) A, B, C একরেখীয় নয় বা l, m, n রেখাগুলি একবিন্দুগামী।

(*c*) A, B, C বিন্দুত্রয় একরেখীয় নয় এবং l, m, n রেখাত্রয় একবিন্দুগামী।

(*d*) A, B, C বিন্দুত্রয় একরেখীয় এবং l, m, n রেখাত্রয় একবিন্দুগামী নয়।

(*e*) A, B, C বিন্দুত্রয় একরেখীয় নয় এবং l, m, n রেখাত্রয় একবিন্দুগামী নয়।

(*f*) l, m, n রেখাত্রয় একবিন্দুগামী নয় অথবা A, B, C বিন্দুত্রয় একরেখীয় নয়।

(*g*) একথা সত্য নয় যে A, B, C বিন্দুত্রয় একরেখীয় এবং l, m, n রেখাত্রয় একবিন্দুগামী।

(*h*) একথা মিথ্যা যে A, B, C বিন্দুত্রয় একরেখীয় বা l, m, n রেখাত্রয় একবিন্দুগামী।

(*i*) হয় A, B, C বিন্দুত্রয় একরেখীয় এবং l, m, n একবিন্দুগামী নয় কিংবা A, B, C একরেখীয় নয় এবং l, m, n একবিন্দুগামী।

উত্তর : (*a*) এই মিশ্র প্রতিজ্ঞাকে প্রতীক আকারে $p \wedge q$ লেখা যায়।

(*b*) এই প্রতিজ্ঞাটিকে লেখা যায় $p' \vee q$

(*c*) " " " " $p' \wedge q$

(*d*) " " " " $p \wedge q'$

(*e*) " " " " $p' \wedge q'$

(*f*) " " " " $q' \vee p'$

(*g*) " " " " $(p \wedge q)'$

(*h*) " " " " $(p \vee q)'$

(*i*) " " " " $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$.

4. ধর p ও q সরল প্রতিজ্ঞাগুলির যথার্থমান যথাক্রমে 'সত্য' ও 'অসত্য'। তাহলে নিম্নলিখিত সাংকেতিক বচনগুলির সত্যমান নির্ধারণ কর :

(i) $p \vee q$ (ii) $p \wedge q$ (iii) p' (iv) q' (v) $p' \vee q$ (vi) $p \vee q'$ (vii) $p' \wedge q'$ (viii) $p' \wedge q$ (ix) $p \wedge q'$ (x) $p' \wedge q'$.

উত্তর ঃ (i) যদি p প্রতিজ্ঞাটিকে 'সত্য' ও q প্রতিজ্ঞাটিকে 'অসত্য' ধরা হয় তাহলে $p \vee q$-এর মান 'সত্য' হবে তা তোমরা $p \vee q$-এর সংজ্ঞা থেকে জেনেছ। $\therefore$ $p \vee q$-এর মান 'সত্য'।

(ii) $p \wedge q$-এর সংজ্ঞা থেকে বলা যায় যে যদি p-এর মান 'সত্য' ও q-এর মান 'অসত্য' হয় তাহলে $p \wedge q$-এর সত্যমান 'অসত্য'।

(iii) সংজ্ঞা থেকে পাই যে p প্রতিজ্ঞাটির যথার্থ মান যদি 'সত্য' হয় তাহলে p' প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান 'অসত্য' হয়।

(iv) অনুরূপভাবে q প্রতিজ্ঞাটির মান যদি 'অসত্য' হয় তাহলে q প্রতিজ্ঞাটির মান 'সত্য'।

(v) p' প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান 'অসত্য' ও q প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান অসত্য ; অতএব $p' \vee q$ প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান 'অসত্য'।

(vi) p প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান 'সত্য' ও q' প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান 'সত্য' ; অতএব $p \vee q'$ প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান 'সত্য'।

(vii) অনুরূপভাবে $p' \vee q'$ প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান 'অসত্য'।

(viii) $p' \vee q$ প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান 'অসত্য'।

(ix) $p \wedge q'$ প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান 'সত্য'।

(x) $p' \wedge q'$ প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান 'অসত্য'।

প্রশ্নমালা 3(a)

1. নীচের বিবৃতিগুলির কোনগুলি প্রতিজ্ঞা তা' যুক্তির সাহায্যে স্থির কর ঃ

(*a*) গোলাপ ফুল লাল,

(*b*) সুন্দর সুগন্ধী রজনীগন্ধা,

(*c*) 13 একটি মৌলিক সংখ্যা,

(*d*) সব অংকই বেশ জটিল এবং কিছু অংকের সমাধান সম্ভব নয়,

(*e*) আমাকে বইটি দাও,

(*f*) বর্ষাকালে বৃষ্টি হয়,

(*g*) মধুপুর স্বাস্থ্যকর স্থান,

(*h*) আজ স্কুলে যাওয়া সম্ভব নয়,

(*i*) $2+3=3+2$,

(*j*) $(A \cup B)' = B' \cup A'$

2. নীচের প্রতিজ্ঞাগুলির নঞর্থক প্রতিজ্ঞার ভাষায় প্রকাশ কর ঃ

(i) মাক্সিম গোর্কির ছোট গল্পগুলি আমার ভাল লাগে,

(ii) কুকুরেরা প্রভুভক্ত,

(iii) সব শিক্ষকরা আদর্শবাদী নয়,

(iv) আজ বেশ গরম পড়েছে,

(v) $4^2+3^2=5^2$

3. (i) p ঃ রামায়ণ সুপ্রাচীন কাব্য,

q ঃ গীতাঞ্জলি কাব্যগ্রন্থ রবীন্দ্রনাথের অন্যতম শ্রেষ্ঠ গ্রন্থ।

(ii) p ঃ দক্ষিণ ভারতের অধিবাসীরা ধর্মভীরু,

q ঃ 'তাজমহল' সম্রাট শাহজাহান তৈরী করান।

(iii) p ঃ হিন্দী ভারতের রাষ্ট্রভাষা,

q ঃ দিল্লী ভারতের রাজধানী।

উপরের প্রতিজ্ঞাগুলি থেকে $p \vee q$, $p \wedge q$ মিশ্র প্রতিজ্ঞাগুলি ভাষায় প্রকাশ কর।

4. নীচের মিশ্র প্রতিজ্ঞাগুলিকে প্রতীক আকারে প্রকাশ কর :

p ঃ অমিত অসিতকে পছন্দ করে।

q ঃ নবনীতা নন্দিতাকে পছন্দ করে।

(i) অমিত অসিতকে পছন্দ করে এবং নবনীতা নন্দিতাকে পছন্দ করে,

(ii) অমিত অসিতকে পছন্দ করে না কিন্তু নবনীতা নন্দিতাকে পছন্দ করে

(iii) অমিত অসিতকে পছন্দ করে কিংবা নবনীতা নন্দিতাকে পছন্দ করে।

(iv) অমিত অসিতকে পছন্দ করে কিন্তু নবনীতা নন্দিতাকে অপছন্দ করে।

(v) একথা সত্য নয় যে অমিত অসিতকে অপছন্দ করে এবং নন্দিতা নবনীতাকে অপছন্দ করে।

5. যদি p ঃ ওষুধ সেবনে রোগ নিরাময় হয়।

q ঃ ডাক্তাররা নির্দয় হয়।

তাহলে $p \vee q$, $p \wedge q$, $p' \vee q$, $p \vee q'$, $p' \vee q'$, $p' \wedge q'$, $(p \vee q)'$, $(p \wedge q)$ প্রতীকী প্রতিজ্ঞাগুলিকে ভাষায় প্রকাশ কর।

6. যদি p : সকল বর্গক্ষেত্রকে আয়তক্ষেত্র বলা যায়,

q : সকল আয়তক্ষেত্রই সামান্তরিক।

তাহলে (i) $(p' \vee q')'$, (ii) $(p' \wedge q) \vee (p \wedge q')$, (iii) $p \vee q'$, (iv) $(p \wedge q') \wedge (p' \wedge q)$ মিশ্র প্রতিজ্ঞাগুলিকে ভাষায় প্রকাশ কর।

7. নীচের প্রতিজ্ঞাগুলির নঞর্থক বা ব্যতিরেকী প্রতিজ্ঞাগুলি যথার্থ ভাষায় প্রকাশ কর :

(a) বরফ ঠাণ্ডা এবং সূর্য একটি তারা।

(b) 6-এর সঙ্গে 7 যোগ করলে 13 হয়।

(c) শীতকালে কমলালেবু খেতে ভাল লাগে এবং চেরাপুঞ্জীতে বেশী বৃষ্টি হয়।

(d) ভারতীয় ক্রিকেট দল ইংলণ্ডের বিরুদ্ধে 1971 খৃষ্টাব্দে 'রাবার' লাভ করে।

(e) 1970 খৃষ্টাব্দে ভারতবর্ষে প্রায় 14,500 পুস্তক প্রকাশিত হয় এবং 1953 খ্রীষ্টাব্দে 'সঙ্গীত নাটক আকাদমী' স্থাপিত হয়।

8. যদি p ও q মৌলিক প্রতিজ্ঞা দুটির মধ্যে p-এর মান 'অসত্য' এবং q-এর মান 'সত্য' হয় তাহলে :

(a) p', (b) $p \wedge q$, (c) $p \vee q$, (d) $p \wedge p'$, (e) $p \vee p'$, (f) $(p \wedge q) \vee (p \wedge q')$ প্রতিজ্ঞাগুলির মান নির্ণয় কর।

9. নীচের মিশ্র প্রতিজ্ঞাগুলির মৌলিক প্রতিজ্ঞাগুলি নির্ণয় কর :

(a) রমেশ ইংরেজী ও অঙ্কে বেশ কাঁচা।

(b) খবরটি আমি বন্ধুর কাছে শুনেছি কিংবা রেডিওতে শুনেছি।

(c) আমি আজ ইডেন গার্ডেনে বেড়াতে যাব কিংবা বঙ্গসংস্কৃতি সম্মেলনে যাব।

(d) আমি হেঁটে স্কুলে যাই কিন্তু রিক্সায় যাই না।

(e) যে কোন ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় একবিন্দুগামী কিন্তু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি একরেখীয় নয়।

(f) একথা সত্য নয় যে ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ এবং যে কোন দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্র।

10. ধর p : আমি পাখির ডাক ভালবাসি।

q : আমার একটি কুকুর আছে।

তাহলে $\sim[\sim p \vee \sim \sim q] \wedge (\sim \sim p)$ মিশ্র প্রতিজ্ঞাটি ভাষায় প্রকাশ কর।

§3·4. প্রতিজ্ঞেয় অপেক্ষক (Propositional Function)

চল রাশি এবং তাদের অপেক্ষক-এর কথা দ্বিতীয় অধ্যায়ে আলোচিত হয়েছে। প্রতীকী তর্ক বিদ্যায় প্রতিজ্ঞা সমূহকে p, q, r ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করা হয়। এখানে p, q, r প্রতিজ্ঞাগুলিকে চল রাশি (Variable) ভাবা যায় এবং p q, r ইত্যাদিকে **প্রতিজ্ঞেয় চল** (propositional variable) বলা হয়।

যদি সীমিত সংখ্যক প্রতিজ্ঞেয় চল সংযোজক ও বন্ধনীয় সমন্বয়ে একটি নির্দিষ্ট তথ্য বা বিবৃতি গঠিত হয় তখন সেই তথ্য বা বিবৃতিকে প্রতিজ্ঞেয় চলরাশিগুলির অপেক্ষক বা শুধু প্রতিজ্ঞেয় অপেক্ষক (Propositional function) বলা হয়। পরব র্তী আলোচনায় প্রতিজ্ঞেয় অপেক্ষকের পরিবর্তে শুধু 'অপেক্ষক' পদটি ব্যবহৃত হবে।

$(p \vee q)'$ এই প্রতীক বাক্যটি প্রতিজ্ঞেয় চল p, q দুটি সংযোজক $\vee$, / এবং প্রথম বন্ধনীর সাহায্যে গঠিত। এছাড়া $(p \vee q)'$ বাক্যটি একটি মিশ্র প্রতিজ্ঞা ; সুতরাং $(p \vee q)'$ একটি অপেক্ষক।

অনুরূপভাবে বলা যায় যে (p'), $p \vee (q' \wedge r')$, $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$ ইত্যাদি এক একটি অপেক্ষক।

যে কোন অপেক্ষকের মান হয় 'সত্য' (T) কিংবা 'অসত্য' (F) হয় ; এছাড়া অন্য কোন মান অপেক্ষকটি ধারণ করতে পারে না। বীজগণিতে যে সব অপেক্ষক দেখা যায় তাদের চলরাশি x, y, z ইত্যাদি যে কোন বাস্তব সংখ্যার মান ধারণ করতে সক্ষম এবং এদের মান চলরাশি x, y, z ইত্যাদির মানের উপর নির্ভরশীল। যেহেতু x, y, z-এর মান অসংখ্য হতে পারে সুতরাং বাস্তব রাশির অপেক্ষক-এর মানও অসংখ্য। অন্যদিকে প্রতিজ্ঞেয় অপেক্ষকগুলি কিন্তু সংখ্যার অপেক্ষকদের চেয়ে একটু আলাদা ধরনের। যে কোন প্রতিজ্ঞার সত্য মান যেহেতু হয় T কিংবা F সুতরাং যে-কোন প্রতিজ্ঞেয় অপেক্ষকের সত্যমান দুটি (T বা F)। বুলিয় অপেক্ষকের ন্যায় যে কোন

প্রতিজ্ঞেয় অপেক্ষককে তার সত্য-সারণি (Truth table) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই সারণিতে প্রথমে প্রতিজ্ঞাগুলির (p, q, r ইত্যাদির) সম্ভাব্য যথার্থ মান লেখা হয় এবং পরে অপেক্ষকগুলির সত্যমান লেখা হয়।

প্রতিজ্ঞেয় অপেক্ষককে ভাষায় নানা আকারে প্রকাশ করা যায়। প্রতীকী ন্যায়ে যে-কোন অপেক্ষককে তার সত্য সারণি দ্বারা প্রকাশ রীতিকেই অপেক্ষকটির সংজ্ঞা হিসেবে ধরা হয়। যদি কোন অপেক্ষকে দুটি চল p, q থাকে তাহলে অপেক্ষকটিকে $f(p, q)$ বা $g(p, q)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

দুটি অপেক্ষক $f(p, q)$ ও $g(p, q)$-কে সমান বলা হয় যদি p ও q-এর সকল সম্ভাব্য সত্য মানের জন্য $f(p, q)$ ও $g(p, q)$ অপেক্ষক দুটির সত্য সারণি হুবহু এক রকমের হয়।

এখন $p \vee q$, $p \wedge q$, $p'(\sim p)$ এই তিনটি মূল অপেক্ষকের সংজ্ঞা সত্য সারণি দ্বারা প্রকাশ করা হবে। প্রসঙ্গতঃ মনে রাখতে হবে সত্যমান যদি সত্য হয় তাহলে T বা 1 দ্বারা এবং যদি 'অসত্য' হয় তাহলে F বা 0 দ্বারা তা প্রকাশ করা হবে। এখন 0 এবং 1 দুটি চিহ্ন হিসাবে গণ্য করা হবে এবং এই চিহ্ন দুটি সংখ্যা 0 ও সংখ্যা 1 থেকে সম্পূর্ণ ভিন্ন।

(i) $p \vee q$-এর সত্যমান p ও q-এর সত্যমানের উপর নির্ভরশীল। এখানে p ও q-এর সম্ভাব্য সত্যমান চার প্রকারের হয়। যথা—

(1) p সত্য, q সত্য ;
(2) p সত্য, q অসত্য ;
(3) p অসত্য, q সত্য ;
(4) p অসত্য, q অসত্য ;

এই চারটি মানের জন্য $p \vee q$-এর সত্য সারণি এভাবে লেখা যায়—

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

সারণি—1

p	q	$p+q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

সারণি—2

উভয় সারণিতে $p \vee q$-এর সত্যমান শেষ স্তম্ভে লেখা হয়েছে। লক্ষ্য কর যে $p \vee q$-এর সত্যমান F বা 0 হয় যদি p ও q উভয়ের সত্যমান F বা 0 হয় অন্যথায় $p \vee q$-এর সত্যমান T বা 1। সারণি 1 ও সারণি 2-এর মধ্যে কোন তফাৎ নেই। সারণি 2তে শুধু '$\vee$'এর পরিবর্তে '+' T-এর পরিবর্তে '1' ও F-এর পরিবর্তে '0' বসানো হয়েছে। সারণি—1 কিংবা সারণি—2কে $p \vee q$-এর সংজ্ঞা বলা হয়।

(ii)

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

সারণি—3

p	q	$p \cdot q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

সারণি—4

(iii)

p	$\sim p$
T	F
F	T

সারণি—5

p	p'
1	0
0	1

সারণি—6

সারণি 3 বা সারণি 4, $p \wedge q$-এর সংজ্ঞা হিসেবে ধরা হয়। সারণি 5 বা সারণি 6-কে $\sim p$ বা p-এর সংজ্ঞা ধরা হয়।

নীচে আরও কয়েকটি প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞেয় অপেক্ষকের সত্যমানের সারণি দেওয়া হল।

(a)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

(b)

p	q	p'	q'	$p' \vee q'$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1

(c)

p	q	p'	q'	$p' \vee q$	$p \vee q'$	$p' \wedge q$	$p \wedge q'$
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0

(d)

p	$p \vee p$	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

(e)

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$
1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1

(f)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

(g)

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee p$	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$
1	1	1	1	1	1	1	1	I
1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

[এই সারণিতে p, q, r প্রতিজ্ঞাগুলির সম্ভাব্য যথার্থ মান $2 \times 2 \times 2 = 8$ এবং p, q, r-এর 8টি যথার্থ মানের জন্য $p \vee q$, $q \vee r$, $p \wedge q$, $q \wedge r$ ইত্যাদি অপেক্ষকগুলির যথার্থ মানগুলি বিভিন্ন স্তম্ভে প্রকাশ করা হয়েছে।]

উপরের সকল সারণিগুলি প্রস্তুত করার সময় '$\wedge$'. '$\vee$', '/' প্রভৃতি প্রক্রিয়ার জন্য মূল সারণিগুলির সাহায্য নেওয়া হয়েছে।

(d) সারণিতে লক্ষ্য কর যে $p \vee p$ এবং p-এর সত্য সারণি একই প্রকারের অতএব বলা যায় যে $p \vee p = p$.

অনুরূপভাবে বলা যায় $p \wedge p = p$.

(f) সারণি থেকে দেখা যাচ্ছে $p \vee q = q \wedge p$ এবং $p \vee q = q \vee p$.

উদাহরণ ঃ

1. $(p+q)'$, $p'+q'$, $(p+q)' \,.\, (p'+q')$ অপেক্ষকগুলির সত্যমানের সারণি প্রস্তুত কর :

p	q	$p+q$	p'	q'	$p'+q'$	$(p+q)'$	$p'+q'$
1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

2. $p \,.\, q$, $(p \,.\, q)'$, $p' \,.\, q'$, $(p \,.\, q)'$ অপেক্ষকগুলির সত্যমানের সারণি প্রস্তুত কর :

p	q	$p \,.\, q$	p'	q'	$p' \,.\, q'$	$(p \,.\, q)'$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1

3. সারণির সাহায্যে দেখাও যে $(p+q)' = p' \,.\, q'$ এবং

$$(p \,.\, q)' = p' + q'$$

p	p'	q	q'	$p+q$	pq	$p' \,.\, q'$	$p'+q'$	$(pq)'$	$(p+q)'$
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
						↑	↑	↑	↑

উপরের সারণিতে $p'+q'$ এবং $(p \,.\, q)'$ প্রতিজ্ঞা দুটির যথার্থ মান একই প্রকারের। সুতরাং $(p \,.\, q)' = p' + q'$. অনুরূপভাবে বলা যায় $(p+q)' = p' \,.\, q'$.

4. দেখাও যে (i) $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

(ii) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$

(iii) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(iv) $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$(q \vee r)$	$p \vee (q \vee r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$p \wedge r$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

$p \vee (q \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1
1	1	1
1	1	1
1	0	0
1	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

এই সারণি থেকে দেখা যায় যে, $(p \vee q) \vee r$ ও $p \vee (q \vee r)$ প্রতিজ্ঞা-গুলির সত্যমান একই প্রকারের এবং $(p \wedge q) \wedge r$ ও $p \wedge (q \wedge r)$ প্রতিজ্ঞা-গুলির সত্যমানগুলি যে স্তম্ভে নির্দেশিত হয়েছে তারা অনুরূপ

$$\therefore \quad (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

এবং $(p \wedge q) \wedge r = (p \wedge q) \wedge r$

অনুরূপভাবে দেখা যাচ্ছে যে $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

5. $p \wedge p$, $p \vee p$, $p \wedge p'$, $p \vee p'$ মিশ্র প্রতিজ্ঞাগুলির সত্য সারণি প্রস্তুত কর।

p	$p \wedge p$	$p \vee p$	p'	$p \wedge p'$	$p \vee p'$
1	1	1	0	**0**	**1**
0	0	0	1	**0**	**1**

[লক্ষ্য কর যে $p \wedge p'$ অপেক্ষকটির সত্যমান p-এর সকল প্রকার সত্য-মানের জন্য অসত্য এবং $p \vee p'$ অপেক্ষকটির যথার্থ মান p এর সম্ভাব্য সত্যমানের জন্য 'সত্য']

6. যদি p, q, r তিনটি মৌলিক প্রতিজ্ঞা হয় তাহলে নীচের অপেক্ষক-গুলির সত্য সারণি প্রস্তুত কর :

(a) $(p \vee q) \wedge r$ (b) $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

(c) $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ (d) $(p \vee q) \vee r'$

(e) $(p \vee q') \vee r$

p	q	q'	r	r'	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0

$(p \vee r)$	$q \vee r$	$(p \vee r) \vee (q \vee r)$
1	1	1
1	1	1
1	1	1
1	0	0
1	1	1
0	1	0
1	1	1
0	0	0

(*a*) ও (*c*) অপেক্ষক দুটির যথার্থ সারণি উপরের সারণি থেকে পাওয়া যায়।

$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \forall (q \wedge r)$
1	1	1
0	0	0
1	0	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0
0	0	0
0	0	0

$(p \vee q) \vee r'$	$p \vee q'$	$(p \vee q') \vee r$
1	1	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1
1	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

§3·5. প্রতিজ্ঞেয় অ্যালজেব্রা (Algebra of Propositions)

যদি প্রতিজ্ঞা সমূহকে একটি সেট P ধরা যায় তাহলে এই সেটে উপযুক্ত প্রক্রিয়ার সংজ্ঞা দিয়ে দেখানো যায় যে সেটটি প্রক্রিয়াগুলি সাপেক্ষে একটি বিশেষ ধরনের বুলিয় অ্যালজেব্রা গঠন করে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক p, q ও r প্রতিজ্ঞাগুলি, প্রতিজ্ঞা সমূহের সেট P-এর পদ। আমরা জানি যে $p \vee q$, $p \wedge q$ ও p' প্রতিজ্ঞাগুলিও P-এর পদ। সুতরাং '$\vee$' ও '$\wedge$'কে দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া এবং ($'$)কে একপদী প্রক্রিয়া নিয়ে P সেটটি যে সকল নিয়ম মেনে চলে তা নির্ণয় করতে পারি।

যদি $p, q, r \in P$ তাহলে সত্যতা সারণির সাহায্যে দেখানো যায় যে

(i) $p \vee q = q \vee p$

$p \wedge q = q \wedge p$

অতএব বিনিময় নিয়মটি Pতে সিদ্ধ।

(ii) আবার Pতে এমন একটি পদ পাওয়া যাবে যার সত্যমান সবদাই অসত্য বা 0 ; সুতরাং $p \vee 0 = p$ সকল p-এর জন্য সত্য। অতএব '0' হচ্ছে '$\vee$' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একক পদ। Pতে আবার এমন প্রতিজ্ঞা আছে যাদের টটোলজি (tautology) বলা হয় যার সত্যমান সর্বদাই সত্য বা 1 সুতরাং $p \wedge 1 = 1 \wedge p = p$ সকল p-এর জন্য সত্য। অতএব '1' হবে '$\wedge$' সাপেক্ষে P-এর একক পদ।

$\therefore \quad p \vee 0 = 0 \vee p = p$

$p \wedge 1 = 1 \wedge p = p$

(iii) সত্যতা সারণির সাহায্যে দেখানো হয়েছে যে $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ এবং $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. সুতরাং দুটি বিচ্ছেদ সূত্র Pতে সিদ্ধ হয়।

(iv) প্রতিটি প্রতিজ্ঞা p-এর জন্য নঞর্থক প্রতিজ্ঞা p' পাওরা সম্ভব যাতে

$p \vee p' = 1$

এবং $p \wedge p' = 0$ সিদ্ধ হয়।

সুতরাং বুলিয় এ্যালজেব্রার চারটি ধর্মই Pতে সিদ্ধ। অতএব P সেটটি V, V ও / প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি বুলিয় এ্যালজেব্রা গঠন করে। এই তথ্যটিকে আমরা এভাবে লিখতে পারি ঃ **সকল প্রতিজ্ঞা সমূহের সেট '∨', '∧' ও '/' সাপেক্ষে একটি বুলিয় অ্যালজেব্রা গঠন করে।**

প্রশ্নমালা 3(b)

1. নীচের অপেক্ষকগুলির সত্য সারণি গঠন কর :

(a) $p \wedge q'$ (b) $(p' \wedge q) \vee (p \wedge q')$

(c) $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)'$ (d) $(p \wedge q')'$

(e) $(p \wedge q) \vee (p \vee q)'$ (f) $[p \wedge (p' \vee q)]' \vee q$

2. দেখাও যে $p' \vee q$ ও $(p \vee q')'$ অপেক্ষক দুটির সত্য সারণি একই ধরনের (অর্থাৎ $p' \vee q = (p \wedge q')'$)

3. দেখাও যে $(p \vee q)' = p' \wedge q'$

4. যদি p ঃ সৌমিত্র স্কুল ফাইন্যাল পরীক্ষায় কৃতকার্য হয়েছে,

q ঃ সুনন্দা স্কুল ফাইন্যাল পরীক্ষায় কৃতকার্য হয়েছে।

তাহলে "একথা সত্য নয় যে সৌমিত্র ও সুনন্দা উভয়েই স্কুল ফাইন্যাল পরীক্ষায় অকৃতকার্য হয়েছে" এই মিশ্র প্রতিজ্ঞাটিকে প্রতীক আকারে প্রকাশ কর।

এই মিশ্র প্রতিজ্ঞাটির সত্য সারণি প্রস্তুত কর। কোন কোন ক্ষেত্রে এই মিশ্র প্রতিজ্ঞাটি 'সত্য' হবে তা সারণি থেকে নির্ণয় কর।

5. p ঃ মিহির সুশ্রী,

q ঃ সোনা মূল্যবান ধাতু।

"একথা ঠিক নয় যে মিহির সুশ্রী নয় এবং সোনা মূল্যবান ধাতু।" এই মিশ্র প্রতিজ্ঞাকে প্রতীক আকারে প্রকাশ কর। p ও q-এর কোন কোন সত্য মানের জন্য মিশ্র প্রতিজ্ঞাটি 'অসত্য' হবে তা স্থির কর।

6. p : 2 একটি মৌলিক সংখ্যা,

q ঃ যে কোন ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় এক বিন্দুতে ছেদ করে।

উপরের প্রতিজ্ঞা দুটি থেকে $p' \wedge q'$, $(p \vee q')'$, $p \vee (p \wedge q)$ অপেক্ষকগুলি 'সত্য' কি 'অসত্য' তা সারণির সাহায্যে নির্ণয় কর।

[এক্ষেত্রে p ও q প্রতিজ্ঞা দুটির যথার্থ মান সর্বদাই সত্য।]

7. যদি p ও q প্রতিজ্ঞা দুটির যথার্থ মান 'সত্য' **(1)** হয় এবং r, s প্রতিজ্ঞা দুটির যথার্থ মান 'অসত্য' (0) হয় তাহলে নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির সত্যমান স্থির কর :

(a) $(p \vee r)'$ (b) $p' \wedge r'$ (c) $p' \vee r'$ (d) $(p \wedge r)'$

(e) $q' \wedge r$ (f) $q \vee s$ (g) $p' \wedge q'$ (h) $r' \vee s'$

(i) $p \wedge (q' \vee r)$ (j) $p \vee (r' \wedge s')$ (k) $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$

8. নীচের অপেক্ষকগুলির সত্য সারণি প্রস্তুত কর :

(a) $(p \vee q)' \vee (q \vee p)'$ (b) $(p \vee q)' \wedge p$ (c) $(p' \vee q') \vee r$

(d) $(p' \vee q) \vee r'$ (e) $(p \vee q)' \vee r$

(f) $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ (g) $p \vee q \vee (p \wedge q)$

(h) $[r' \vee (p \wedge q)]'$ (i) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r)$
$\vee (p' \wedge q' \wedge r')$ (j) $p' \wedge q' \vee (p \wedge q)$

(j) $(p \vee q)' \wedge p$ (k) $(p \wedge q') \vee (p' \wedge r')$

(l) $(p \wedge q) \vee (p' \wedge q)$.

9. সারণি সাহায্যে দেখাও যে,

(a) $p \vee (p \wedge q) = p = p \wedge (p \vee q)$

(b) $p \wedge (p \wedge q) = p \wedge q$

(c) $(p \vee q)' = p' \wedge q'$

(d) $(p \wedge q)' = p' \vee q'$

(e) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(f) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)'$

10. $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ এই অপেক্ষকটির সত্য সারণি প্রস্তুত কর।

11. দেখাও যে "একথা ঠিক নয় যে সুহৃদ খুব সাদাসিধে অথবা রাঘবন তোষামদকারী" এবং "সুহৃদ খুব সাদাসিধে নয় এবং রাঘবন তোষামদকারী নয়" এই মিশ্র প্রতিজ্ঞা দুটির সত্যমান অভিন্ন নয়।

3 6. পূর্বের অনুচ্ছেদে দুই বা ততোধিক প্রতিজ্ঞের চলের অপেক্ষকদের সত্যমান সারণি পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়েছে। এই সারণিগুলি পর্যালোচনা করলে দেখা যায় যে অপেক্ষকগুলির সত্যমান চলগুলির সত্যমানের উপর

নির্ভরশীল। প্রতিজ্ঞেয় অপেক্ষকগুলির সত্যমানের প্রকৃতি অনুযায়ী অপেক্ষকগুলিকে তিনটি শ্রেণীতে ভাগ করা যায়।

1. **টটোলজি** (Tautology).
2. **কন্‌ট্রাডিক্সন** (Contradiction).
3. **কনটিনজেন্সি** (Contingency)

1. **টটোলজি** (Tautology): যদি কোন অপেক্ষকের সত্যমান অপেক্ষকটি যতগুলি চল দ্বারা গঠিত তাদের সকল সম্ভাব্য সত্যমানের জন্য সর্বদাই T হয় তাহলে এই ধরনের অপেক্ষককে টটোলজি (Tautology) বলে।

উদাহরণ। $p \vee p'$ ও $p \vee (p \wedge q)'$ অপেক্ষক দুটি টটোলজি কারণ এই দুটি অপেক্ষকের সত্য সারণি হবে এইরূপ,

p	p'	$p \vee p'$
1	0	1
0	1	1

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p \vee (p \wedge q)$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

উপরের সারণি দুটি হতে দেখা যাচ্ছে যে, $p \vee p'$ ও $p \vee (p \vee q)'$ অপেক্ষক দুটির সত্যমান p ও q চল দুটির সকল সম্ভাব্য সত্যমানের জন্য T বা 1. অতএব অপেক্ষক দুটি টটোলজি।

2. **কন্‌ট্রাডিক্সন** (Contradiction): যে কোন অপেক্ষককে কনট্রাডিক্সন বলা হয়, যদি চলগুলির সম্ভাব্য সকল সত্যমানের জন্য অপেক্ষকটির সত্যমান সর্বদাই F হয়।

উদাহরণ: $p \wedge p'$ অপেক্ষকটি কন্‌ট্রাডিক্সন, কেননা সারণি হতে দেখা যাচ্ছে যে যদি p 'সত্য' হয় তাহলে $p \wedge p'$ 'অসত্য' এবং যদি p 'অসত্য' হয় তাহলেও $p \wedge q'$ 'অসত্য'। সুতরাং p-এর সকল সম্ভাব্য যথার্থ মানের জন্য p দ্বারা গঠিত অপেক্ষক $p \wedge p'$-এর যথার্থ মান সর্বদাই 'অসত্য'।

$\therefore$ $p \wedge p'$ একটি কন্‌ট্রাডিক্সন

p	p'	$p \wedge p'$
1	0	0
0	1	0

3. **কন্‌টিনজেন্সি (Contingency) :**

যদি কোন অপেক্ষকের চল রাশির সম্ভাব্য সকল প্রকার সত্যমানের জন্য অপেক্ষকটির সত্যমান T বা F উভয়েই হয় তাহলে অপেক্ষকটিকে কন্‌টিনজেন্সি বলে।

উদাহরণ :

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p' \vee q'$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

এই তালিকা হতে দেখা যায় যে $p \vee q$ অপেক্ষকটির সত্যমান 0 ও 1 উভয়েই, সুতরাং $p \vee q$ অপেক্ষকটি কন্‌টিন্‌জেন্সি। অনুরূপভাবে বলা যায় $p \wedge q$, $p' \wedge q'$ অপেক্ষকগুলিও কন্‌টিন্‌জেন্সি।

3·7. Material Implication, Material Equivalence :

Material Implication—পূর্বের অনুচ্ছেদে তিনটি মূল সংযোজক 'এবং', 'অথবা', 'নয় বা না' দুটি মৌলিক প্রতিজ্ঞাকে সংযুক্ত করে যে মিশ্র প্রতিজ্ঞা গঠন করে তাদের কথা আলোচিত হয়েছে। এখন আরও দুটি সংযোজকের কথা বলা হবে যাদের বহুল প্রয়োগ জ্যামিতিক উপপাদ্যে, গাণিতিক প্রতিজ্ঞায় এবং বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখার আলোচনায় দেখা যায়।

1. যদি আবহাওয়া ভাল হয়, তাহলে ফুটবল খেলা দেখতে যাব।

2. যদি হায়ার সেকেণ্ডারি পরীক্ষায় প্রথম বিভাগে উত্তীর্ণ হও, তাহলে ভাল কলেজে ভর্তি হতে পারবে।

3. যদি প্রতিটি ভারতবাসী অক্লান্ত পরিশ্রম করে, তাহলে অর্থ নৈতিক অবস্থা অনেকটা ভালর দিকে যাবে।

4. যদি কোন সংখ্যা যুগ্ম হয়, তাহলে সংখ্যাটি 2 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে।

5. যদি $2+3=5$, তাহলে $(2+3)^2=5^2$

6. যদি ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ হয়, তাহলে ত্রিভুজটির মধ্যমাত্রয় সমবিন্দুগামী হবে।

যদি p=আবহাওয়া ভাল হয়, q=ফুটবল খেলা দেখতে যাব।

তাহলে প্রথম মিশ্র বাক্যটিকে এভাবে লেখা যায়ঃ যদি p তাহলে q. (if p then q).

লক্ষ্য কর, উপরের প্রতিটি মিশ্রবাক্যকে 'যদি p তাহলে q' এই আকারে লেখা সম্ভব। এখানে 'যদি……তাহলে……' কে সংযোজক বলা যেতে পারে কেন না 'যদি……তাহলে……' দ্বারা p ও q বচন দুটি যুক্ত হয়ে মিশ্র বাক্যটি গঠিত হয়েছে।

'যদি……তাহলে……' সংযোজকটির ব্যবহার গণিত ও বিজ্ঞানের আলোচনায় বেশী দেখা যায়। এছাড়া দৈনন্দিন আলাপ আলোচনায় এর প্রয়োগও কম নয়।

'যদি p তাহলে q' এই মিশ্র বাক্যটিতে pকে **পূর্বগ** (Antecedent) এবং qকে **অনুগ** (Consequent) বলা হয়।

'যদি p তাহলে q'কে প্রতীক আকারে লেখা হয় $\boxed{p \rightarrow q}$.

'$\rightarrow$' এই সম্পর্কটিকে Material implication বলা হয়।

যদি p 'সত্য' হয় এবং q 'সত্য' হয় তাহলে $p \rightarrow q$ মিশ্র প্রতিজ্ঞাটিকে সত্য বলা যায়, যদি p 'সত্য' হয় এবং q 'অসত্য' হয় তাহলে $p \rightarrow q$-কে 'অসত্য' বলা যায়। এই দুটি ক্ষেত্র ছাড়া অন্য ক্ষেত্র দুটিতে $p \rightarrow q$ মিশ্র বাক্যটির সত্যমান স্থির না হলে $p \rightarrow q$কে মিশ্র প্রতিজ্ঞা বলা যাবে না।

(i) যদি p 'অসত্য ও q 'সত্য' হয় তাহলে $p \rightarrow q$কে 'সত্য' ধরা হয় এবং যদি p 'অসত্য' এবং q 'অসত্য' হয় তাহলেও $p \rightarrow q$কে সত্য ধরা হয়।

সুতরাং p ও q প্রতিজ্ঞা দুটির চার প্রকার সম্ভাব্য সত্যমানের জন্য $p \rightarrow q$ প্রতিজ্ঞাটির সত্যমান নিচের সত্য সারণি দ্বারা স্থির করা যায়ঃ

p	q	$p \rightarrow q$
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (a) উপরের সত্য সারণিকে $p \to q$ প্রতিজ্ঞার সংজ্ঞারূপে গণ্য করা হয়।

(b) পূর্বগ p এবং অনুগ q-এর মধ্যে কার্যকারণ সম্পর্ক থাকার নিশ্চয়তা $p \to q$ দ্বারা স্থিরীকৃত হয় না। অর্থাৎ q প্রতিজ্ঞাটি p প্রতিজ্ঞাটি থেকে যুক্তি দ্বারা সর্বদা পাওয়া যায় না। যদি q প্রতিজ্ঞাটি সর্বদাই p প্রতিজ্ঞা থেকে যুক্তি বা বিচার দ্বারা পাওয়া যায় তাহলে $p \to q$-কে বলা হয় p logically implies q.

উদাহরণ :

1. ধর p : ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ

q : ত্রিভুজের তিনটি কোণ সমান,

$p \to q$: যদি ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ হয় তাহলে ত্রিভুজের তিনটি কোণ সমান।

এখানে $p \to q$ প্রতিজ্ঞাটি 'সত্য' এবং q প্রতিজ্ঞাটি p থেকে স্থির করা যায়, অর্থাৎ p ও q-এর মধ্যে একটি সম্পর্ক বিদ্যমান।

2. p : $2+2=4$

q : প্রতিটি যুগ্ম সংখ্যা 3 দ্বারা বিভাজ্য নয়

$p \to q$: যদি $2+2=4$ তাহলে প্রতিটি যুগ্ম সংখ্যা 3 দ্বারা বিভাজ্য।

এক্ষেত্রে p ও q প্রতিজ্ঞা দুটি 'সত্য' এবং p ও q-এর মধ্যে যুক্তিগত কোন সম্পর্ক নেই। $p \to q$ প্রতিজ্ঞাটি সত্য, যেহেতু p 'সত্য' এবং q 'সত্য'।

3. p : $3=2$

q : $4+6=10$

$p \to q$: যদি $3=2$, তাহলে $4+6=10$

এখানে p প্রতিজ্ঞাটি 'অসত্য' (যেহেতু $3 \neq 2$) কিন্তু q প্রতিজ্ঞাটি সত্য সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $p \to q$ প্রতিজ্ঞাটি 'সত্য'। লক্ষ্য কর যে p ও q-এর মধ্যে যুক্তিগত কোন সম্পর্ক নেই।

4. (i) p : $8=18$

q : $11=21$

$p \to q$: যদি $8=18$ তাহলে $11=21$.

এখানে p 'অসত্য', q 'অসত্য' কিন্তু $p \rightarrow q$ প্রতিজ্ঞাটি সত্য কেন না $8=18$ প্রতিজ্ঞাটির উভয় দিকে 3 যোগ করে $11=21$ প্রতিজ্ঞাটি পাওয়া যায়।

সুতরাং p ও q প্রতিজ্ঞা দুটি অসত্য হলেও $p \rightarrow q$ প্রতিজ্ঞাটি সত্য। এক্ষেত্রে q প্রতিজ্ঞাটি p হতে যুক্তি দ্বারা পাওয়া যায়।

(ii) p : $5=9$

q : $15=17$

$p \rightarrow q$: যদি $5=9$, তাহলে $25=17$

এক্ষেত্রে p ও q প্রতিজ্ঞা দুটি 'অসত্য', কিন্তু q প্রতিজ্ঞাটি p থেকে যুক্তির দ্বারা স্থির করা যাচ্ছে না। সুতরাং $p \rightarrow q$ প্রতিজ্ঞাটি 'সত্য' বা 'অসত্য' তা নিশ্চিত ভাবে বলা যাচ্ছে না। $p \rightarrow q$ প্রতিজ্ঞাটির সংজ্ঞা থেকে পাই যে যদি p 'অসত্য' এবং q 'অসত্য' হয় তাহলে $p \rightarrow q$ প্রতিজ্ঞাটি 'সত্য'। সুতরাং এক্ষেত্রেও $p \rightarrow q$ প্রতিজ্ঞাটি 'সত্য' ধরা হবে।

6. যদি p : $5=\frac{10}{2}$

q : প্রতিটি বিজোড় সংখ্যা 2 দ্বারা বিভাজ্য,

$p \rightarrow q$: যদি $5=\frac{10}{2}$, তাহলে প্রতিটি বিজোড় সংখ্যা 2 দ্বারা বিভাজ্য।

এখানে $p \rightarrow q$ প্রতিজ্ঞাটি 'অসত্য', কেননা p প্রতিজ্ঞাটি 'সত্য' কিন্তু q প্রতিজ্ঞাটি 'অসত্য'। এখানে p ও q-এর মধ্যে কোন সম্পর্ক নেই।

'যদি……তাহলে' বা '$\rightarrow$' যোজকটি পূর্বে উল্লিখিত '$\vee$', '$\wedge$', '$\sim$' যোজকগুলির যে কোন দুটির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। সত্য সারণির সাহায্যে দেখান যায় যে, $p \rightarrow q = \sim p \vee q$ বা $(p'+q)$.

$p \rightarrow q$ ও $p'+q$ প্রতিজ্ঞা দুটির 'সত্যসারণি' হবে এরূপ :

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	p'	$p'+q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

সুতরাং তালিকা হতে দেখা যায় $p \rightarrow q = p'+q$

[অনেক ক্ষেত্রে $p \to q = p' + q$ সমীকরণটিকে $p \to q$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞা হিসেবে গণ্য করা হয়।]

সুতরাং $p \to q$ বা 'যদি p তাহলে q' এবং "p নয় কিংবা q" (not p or q) বা $p' + q$. প্রতিজ্ঞাগুলি সমতুল্য।

Material equivalence :

যদি p : ABC ত্রিভুজের $\angle A$ এক সমকোণ

$q : \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

এখানে $p \to q$: যদি ABC ত্রিভুজে $\angle A$ এক সমকোণ, তাহলে

$$\overline{AB}^2 + AC^2 = \overline{BC}^2$$

এবং $q \to p$: যদি $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ তাহলে,

ABC ত্রিভুজের A কোণটি এক সমকোণ।

এখানে $p \to q$ এবং $q \to p$ মিশ্র প্রতিজ্ঞা দুটি সত্য। এই ক্ষেত্রে p ও q প্রতিজ্ঞা দুটির মধ্যে একটি বিশেষ সম্পর্ক বিদ্যমান, যেমন $p \to q$ এবং $q \to p$. p ও q-এর এই বিশেষ সম্পর্ককে '$\longleftrightarrow$' এই চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং লেখা হয় $p \longleftrightarrow q$. $\longleftrightarrow$ সম্পর্ককে Material Eqivalence বলা হয়।

$(p \to q) \wedge (q \to p)$ দ্বারা $p \longleftrightarrow q$কে প্রকাশ করা যায়। $p \longleftrightarrow q$ মিশ্র বাক্যটিকে প্রতিজ্ঞা বলা যাবে, যদি p ও q-এর সকল সম্ভাব্য সত্যমানের জন্য $p \longleftrightarrow q$ অপেক্ষকটির সত্যমান সারণি আকারে প্রকাশ করা যায়। নীচের সারণিকে $p \longleftrightarrow q$-এর সংজ্ঞা হিসেবে ধরা হয়।

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \longleftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

অর্থাৎ যদি (i) p 'সত্য' q 'সত্য' হয় তাহলে $p \longleftrightarrow q$ 'সত্য',

(ii) p 'সত্য' q 'অসত্য' হয় তাহলে $p \longleftrightarrow q$ 'অসত্য'

(iii) p 'অসত্য' q 'সত্য' হয় তাহলে $p \longleftrightarrow q$ 'অসত্য'

(iv) p 'অসত্য' q 'অসত্য' হয় তাহলে $p \longleftrightarrow q$ 'সত্য'

$p \longleftrightarrow q$কে অনেক সময় ইংরেজীতে এভাবে পড়া হয়

| ***p*** if and only if ***q*** | বা | ***p*** iff ***q*** |

উদাহরণ ঃ

1. p : ABC ত্রিভুজটির দুটি বাহু সমান,

q : ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু,

$p \longleftrightarrow q$: যদি ABC ত্রিভুজের দুটি বাহু সমান হয় তাহলে ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু এবং যদি ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হয় তাহলে ত্রিভুজটির দুটি বাহু সমান।

2. p : আজ ছাত্র ধর্মঘট।

q : সব স্কুল বন্ধ।

$p \longleftrightarrow q$: যদি আজ ছাত্র ধর্মঘট হয় তাহলে সব স্কুল বন্ধ থাকবে এবং যদি সব স্কুল বন্ধ থাকে তাহলে আজ ছাত্র ধর্মঘট হবে।

3. p : $3+4=7$

q : $7+2=9$

$p \longleftrightarrow q$: যদি $3+4=7$ তাহলে $7+2=9$ এবং যদি $7+2=9$ তাহলে $3+4=7$

বা $(3+4=7) \rightarrow (7+2=9)$ এবং $(7+2=9) \rightarrow (3+4=7)$

4. p : $3+4=8$

q : $9=15$

$p \longleftrightarrow q$: $(3+4=8) \rightarrow (9=15)$ এবং $(9=15) \rightarrow (3+4=8)$.

3·8. কনভার্স (Converse), ইন্‌ভার্স (Inverse) এবং কনট্রাপজিটিভ্ (Contrapositive)

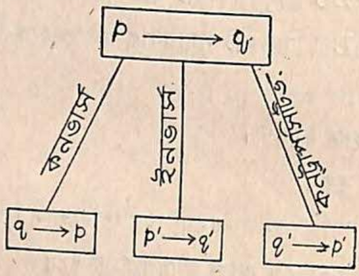
কনভার্স বা বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse proposition) :

যদি p ও q প্রতিজ্ঞা দুটি '$\rightarrow$' যোজক দ্বারা যুক্ত হয় তাহলে লেখা হয় $p \rightarrow q$ বা $p' + q$. $p \rightarrow q$ এই প্রতিজ্ঞাটি হতে আরও তিন প্রকারের প্রতিজ্ঞা পাওয়া যায় যাদের বহুল প্রয়োগ গণিতে দেখা যায়।

1. **কনভার্স :** $q \rightarrow p$ এই প্রতিজ্ঞাটিকে $p \rightarrow q$ বচনের কনভার্স বা বিপরীত বলে। অথবা $p+q'$ প্রতিজ্ঞাটিকে $p'+q$-এর কনভার্স বলে।

2. **ইন্‌ভার্স ঃ** $p' \to q'$ প্রতিজ্ঞাটিকে $p \to q$ প্রতিজ্ঞাটির ইন্‌ভার্স (inverse) প্রতিজ্ঞা বলা যায়। অর্থাৎ $(p')' + q'$ প্রতিজ্ঞাটি $p' + q$ প্রতিজ্ঞাটির ইন্‌ভার্স।

3. **কনট্রাপজিটিভ্‌ ঃ** $q' \to p'$ প্রতিজ্ঞাটিকে $p \to q$ প্রতিজ্ঞাটির কন্‌ট্রাপজিটিভ্‌ বলে। অর্থাৎ $(q')' + p'$ প্রতিজ্ঞাটি $p' + q$ প্রতিজ্ঞাটির ইনভার্স।



p	q	$p \to q$	$q \to p$	p'	q'	$p' \to q'$	$q' \to p'$
1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1

তালিকা হতে দেখা যায় যে (i) $\boxed{p \to q} = \boxed{q' \to p'}$

(ii) $\boxed{q \to p} = \boxed{p' \to q'}$

উদাহরণঃ p ঃ ABC ত্রিভুজের $\overline{AB}$ বাহু $\overline{AC}$ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর

q ঃ ABC কোণ ACB কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর

$p \to q$ ঃ যদি ABC ত্রিভুজের $\overline{AB} > \overline{AC}$ তাহলে $\angle ABC < \angle ACB$

'$p \to q$' এর কনভার্স $q \to p$ ঃ যদি $\angle ABC < \angle ACB$ তাহলে $\overline{AB} > \overline{AC}$

'$p \to q$' এর ইন্‌ভার্স $p' \to q'$ ঃ যদি $\overline{AB}$ বাহু $\overline{AB}$ অপেক্ষা বৃহত্তর না হয় তাহলে কোণ ABC কোণ ACB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় না।

কনট্রাপজিটিভ্ $q' \to p'$: যদি কোণ ABC কোণ ACB অপেক্ষা বৃহত্তর বা সমান হয় তাহলে $\overline{AB}$ বাহু $\overline{AC}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা সমান হবে।

2. $p : 3 > 2$

$q : 8 > 7$

$p \to q$: যদি $3 > 2$, তাহলে $8 > 7$

$q \to p$: যদি $8 > 7$, তাহলে $3 > 2$

$p' \to q'$: যদি $3 \leqslant 2$, তাহলে $8 \leqslant 7$

$q' \to p'$: যদি $8 \leqslant 7$, তাহলে $3 \leqslant 2$

"যদি $3 > 2$, তাহলে $8 > 7$" মিশ্র প্রতিজ্ঞাটির **ইনভার্স** হবে 'যদি $3 \leqslant 2$ তাহলে $8 \leqslant 7$'

"যদি $3 > 2$, তাহলে $8 > 7$" মিশ্র প্রতিজ্ঞাটির **কনভার্স** হবে 'যদি $8 > 7$ তাহলে $3 > 2$'

"যদি $3 > 2$ তাহলে $8 > 7$" মিশ্র প্রতিজ্ঞাটির **কনট্রাপজিটিভ্** হবে 'যদি $8 \leqslant 7$ তাহলে $3 \leqslant 2$'.

4. $p \to q$: যদি পরীক্ষায় ভাল ফল হয়, তাহলে ভাল চাকুরী পাওয়া যায়।

কনভার্স—$q \to p$: যদি ভাল চাকুরী পাওয়া যায় তাহলে পরীক্ষায় ভাল ফল হয়।

ইনভার্স—$p' \to q'$: যদি পরীক্ষায় ভাল ফল না হয় তাহলে ভাল চাকুরী পাওয়া যায় না।

কনট্রাপজিটিভ্—$q' \to p'$: যদি ভাল চাকুরী না পাওয়া যায় তাহলে পরীক্ষায় ভাল ফল হয় না।

3·9. প্রতিজ্ঞার সত্যতা সেট (Truth Set for propositions) :

যুক্তি বিদ্যায় বা গণিতে অনেক প্রশ্নের সমাধানে প্রশ্নটির সাথে জড়িত সকল যৌক্তিক সম্ভাবনাগুলির পরিষ্কার ধারণার বিশেষ প্রয়োজন। যে কোন যৌক্তিক সম্ভাবনা নির্ণয়ের জন্য অনেকক্ষেত্রে সারণির সাহায্যে নেওয়া হয়। কোন মিশ্র প্রতিজ্ঞার যৌক্তিক সম্ভাবনাগুলি নির্ণয়ের জন্য প্রতিজ্ঞাটি যে সকল সরল প্রতিজ্ঞা দ্বারা গঠিত তাদের সকল যৌক্তিক সম্ভাবনাগুলি সারণি আকারে প্রকাশের প্রয়োজন হয়। এই পদ্ধতির সাহায্যে কোন মিশ্র প্রতিজ্ঞার সত্য মান সব সময় নির্ণয় করা সম্ভব হয় না।

যেমন—'পূর্ণসংখ্যা a পূর্ণসংখ্যা b-এর ছোট নয় অথবা পূর্ণসংখ্যা b পূর্ণ সংখ্যা a-এর চেয়ে ছোট নয়। এই প্রতিজ্ঞাটি একটি টটোলজি কিন্তু মিশ্র প্রতিজ্ঞাটির সত্য মান যদি সারণির সাহায্যে নির্ণয় করা যায় তাহলে প্রতিজ্ঞাটিকে টটোলজি বলা যায় না। যদি $p : a < b$ হয় এবং $q : b < a$ হয় তাহলে মিশ্র প্রতিজ্ঞাটির প্রতীকরূপ হবে $p' \vee q'$ বা $p' + q'$

p	q	p'	q'	$p'+q'$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

সুতরাং $p' + q'$ এর মান p ও q-এর সকল যৌক্তিক সম্ভাবনার জন্য 'সত্য' নয়। অতএব এই পদ্ধতিতে বলা সম্ভব হচ্ছে না যে $p' + q'$ একটি টটোলজি। প্রকৃতপক্ষে সত্য সারণির সাহায্যে কোন অপেক্ষকের যৌক্তিক সম্ভাবনা নির্ণয় সম্ভব হয় যদি অপেক্ষকটি নির্দিষ্টার্থক না হয়। উপরের সারণিতে প্রথম সারিটি লেখা সম্ভব নয় কেন না p ও q উভয়েই সত্য হতে পারে না, (যেহেতু $a > b$ ও $a < b$ একসঙ্গে হওয়া সম্ভব নয়)। সুতরাং $p' + q'$ একটি টটোলজি। কোন মিশ্র প্রতিজ্ঞার যৌক্তিক সম্ভাবনার বিশেষ প্রয়োজন গণিতে ও সম্ভাব্যতা তত্ত্বে বিশেষ ভাবে অনুভূত হয়। আমাদের আলোচনা যে সব প্রতিজ্ঞার মধ্যে সীমাবদ্ধ সেই সকল প্রতিজ্ঞার সমূহের সেটের জন্য একটি সার্বিক সেটের কথা ভাবা যেতে পারে যার পদগুলি হবে সকল প্রতিজ্ঞা সমূহের যৌক্তিক সম্ভাবনাগুলি।

যখন এই পদগুলির সঠিক তথ্য জানার প্রয়োজন হয় তখন সকল সম্ভাবনাগুলির সেটকে নির্বাচন করি যারা দুটি ধর্ম মেনে চলে।

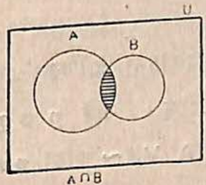
(1) সম্ভাবনাগুলির তালিকা এরূপ হবে যে, যে-কোন পরিস্থিতিতে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সম্ভাবনাই থাকবে।

(2) সম্ভাবনাগুলি এমন হবে যে আনুষঙ্গিক প্রতিজ্ঞার সত্যমান এই সম্ভাবনাগুলির যে কোন একটির সহায়তায় নির্ণয় করা যাবে।

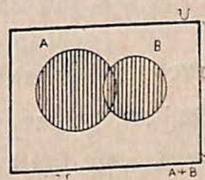
সত্যতা সেট (Truth Set): ধরা যাক আলোচ্য সকল প্রতিজ্ঞার সেট হ'ল A এবং A সেটের প্রতিজ্ঞাগুলির সকল যৌক্তিক সম্ভাবনার সেটটি হ'ল সার্বিক সেট U. যদি আলোচ্য প্রতিজ্ঞার মধ্যে p একটি প্রতিজ্ঞা হয়, তাহলে p প্রতিজ্ঞাটি যে সকল যৌক্তিক সম্ভাবনার জন্য 'সত্য' হবে

সেগুলি U-এর একটি উপসেট হবে। এই উপসেটকে p প্রতিজ্ঞার সত্যতা সেট (Truth set) বলা হয়। একথা পরিষ্কার ভাবে মনে রাখতে হবে যে প্রতিজ্ঞেয় অপেক্ষকের সত্যতা সেট, অপেক্ষকটি যেসকল সরল প্রতিজ্ঞা দ্বারা গঠিত তাদের সত্যতা সেট থেকে নির্ণয় করা সম্ভব।

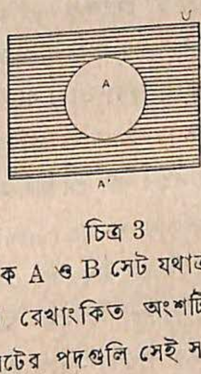
ভেন চিত্রের সাহায্যে প্রতিজ্ঞা বা প্রতিজ্ঞেয় অপেক্ষকের সত্যতা সেট দেখানো সম্ভব হয়। নীচে কয়েকটি মিশ্র প্রতিজ্ঞার সত্যতা সেট ভেন চিত্রের সাহায্যে দেখানো হ'ল :—



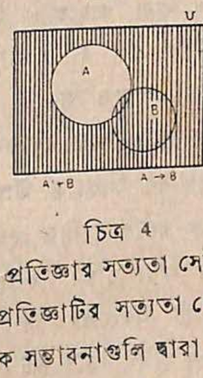
চিত্র 1



চিত্র 2



চিত্র 3



চিত্র 4

ধরা যাক A ও B সেট যথাক্রমে p ও q প্রতিজ্ঞার সত্যতা সেট। তাহলে চিত্র 1-তে রেখাংকিত অংশটি $p \wedge q$ প্রতিজ্ঞাটির সত্যতা সেট। অর্থাৎ A ∩ B সেটের পদগুলি সেই সকল যৌক্তিক সম্ভাবনাগুলি দ্বারা গঠিত যাদের জন্য $p \wedge q$ প্রতিজ্ঞাটির মান T হবে। অনুরূপভাবে চিত্র-2 থেকে $p \vee q$-র সত্যতা সেট, চিত্র-3 থেকে p' প্রতিজ্ঞার সত্যতা সেট এবং চিত্র-4 থেকে $p \to q$ প্রতিজ্ঞাটির সত্যতা সেট রেখাংকিত অংশগুলির দ্বারা নির্দেশিত হয়েছে।

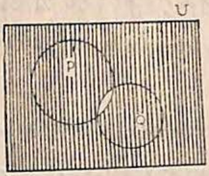
দ্রষ্টব্য : যদি অপেক্ষকটি টটোলজি হয় তাহলে অপেক্ষকটির সত্যতা সেট সার্বিক সেট U-এর সাথে সমান হবে। অনুরূপভাবে যদি প্রতিজ্ঞেয় অপেক্ষকটি যদি কনট্রাডিক্সন হয় তাহলে এইক্ষেত্রে সকল প্রতিজ্ঞাগুলির যৌক্তিক সম্ভাবনাগুলির সেটটি শূন্য সেট ϕ হবে।

উদাহরণ। ভেন চিত্রের সাহায্যে $p' \to q'$; $(p + q)(pq)'$ অপেক্ষক দুটির সত্যতা সেট নির্ণয় কর।

উত্তর : ধরা যাক P ও Q হ'ল p ও q এর সত্যতা সেট, সুতরাং $p' \to q'$ সত্যতা সেট হবে $P' \cup Q'$ সেটটি।

অনুরূপভাবে $(p+q)(pq)'$ প্রতিজ্ঞাটির সত্যতা সেট হবে

$(P \cup Q)) \cap (P \cap Q)'$ সেটটি।



$p' \to q'$ প্রতিজ্ঞাটির ভেন চিত্র দেখানো হ'ল।

অনুরূপভাবে $(p+p)(pq)'$ প্রতিজ্ঞাটির ভেনচিত্র অংকন করা যায়।

অবজেক্ট লজিক (Object Logic), সিনট্যাক্স লজিক (Syntax Logic) :

এই পুস্তকে প্রতীকি ন্যায়ের সম্পূর্ণ আলোচনা 'প্রতিজ্ঞা'-কে কেন্দ্র করে এবং 'প্রতিজ্ঞা'-কে অসংজ্ঞেয় পদ ধরা হয়েছে। যদি p ও q দুটি সরল প্রতিজ্ঞা ধরা হয় তাহলে তিনটি মুখ্য যোজক $\wedge, \vee, \sim$ দ্বারা $p \wedge q, p \vee q, \sim q$ বা $\sim p$ মিশ্র প্রতিজ্ঞা গঠন করা সম্ভব হয়। এদের সংজ্ঞা সত্য সারণি দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে। উপরোক্ত তিনটি যোজক দুই বা ততোধিক প্রতিজ্ঞার উপর এক বা একাধিকবার প্রয়োগে বহু মিশ্র প্রতিজ্ঞা গঠন করা যায়। এছাড়া আরও অনেক মিশ্র প্রতিজ্ঞার কথা ভাবা যায় যারা তিনটি মুখ্য যোজক ছাড়া অন্য যোজক দ্বারা গঠিত। শেষোক্ত প্রতিজ্ঞাগুলি হতে যুক্তি দ্বারা যে সব সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া সম্ভব হয় সেগুলি সরল প্রতিজ্ঞা সম্বন্ধে অনেক ধর্মের ইংগিত দেয় যাদের প্রতিজ্ঞার সজ্ঞাত (intuitive) সংজ্ঞা হিসেবে গণ্য করা যায়। ফলে জটিল পরিস্থিতির উদ্ভব হয় কেন না 'সরল প্রতিজ্ঞা' একটি অসংজ্ঞেয় পদ। এই পরিস্থিতির উপযুক্ত বিশ্লেষণ করা সম্ভব হয় যদি যুক্তি বিদ্যার দুটি শ্রেণী ও তাদের পার্থক্য সম্বন্ধে ধারণা থাকে। একটি শ্রেণী হ'ল **অবজেক্ট লজিক** (object logic) এবং অপরটি হ'ল **সিনট্যাক্স লজিক** (syntax logic). প্রতিজ্ঞাকে অসংজ্ঞেয় পদ ধরে এবং এদের অপেক্ষক হতে কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হতে যে যুক্তি (logic)-র আশ্রয় নেওয়া হয় তাকে অবজেক্ট লজিক এবং প্রতিজ্ঞা সম্পর্কিত কিছু আলোচনার জন্য যে যুক্তির আশ্রয় নেওয়া হয় তাকে সিনট্যাক্স লজিক বলে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যায় যে সরল প্রতিজ্ঞা p ও q এবং তিনটি যোজকের সাহায্যে গঠিত $p \vee q, p \wedge q, (p \vee p)'$ ইত্যাদি প্রতিজ্ঞাগুলি অবজেক্ট লজিকের প্রতিজ্ঞা। আবার $p=q$ বা p সত্য, q অসত্য ইত্যাদি সিনট্যাক্স লজিকের প্রতিজ্ঞা কেননা এ তথ্যগুলি সরল প্রতিজ্ঞা সম্পর্কিত।

প্রশ্নমালা 3(c)

1. যদি p –'সে বাংলায় ভাল' এবং q—'সে অংকে ভাল' তাহলে নীচের মিশ্র প্রতিজ্ঞাগুলি প্রতীক দ্বারা প্রকাশ কর।

(a) সে বাংলায় ভাল এবং সে অংকে ভাল,

(b) সে বাংলায় ভাল নয় এবং সে অংকে ভাল,

(c) সে অংক বা বাংলা কোন বিষয়েই ভাল নয়,

(d) ইহা সত্য নয় যে সে বাংলায় ভাল এবং অংকে ভাল নয়,

(e) একথা ঠিক নয় যে সে বাংলা কিংবা অংকে ভাল,

2. নীচের সত্য সারণিটি পূর্ণ কর।

p	q	p'	q'	$p' \wedge q'$	$p' \vee q'$	$p' \wedge q$	$(p \wedge q')$
T	T						
T	F						
F	T						
F	F						

3. নীচের কোন কোন প্রতিজ্ঞাগুলি একই অর্থবহ তা সত্য সারণির দ্বারা স্থির কর:

I. (a) একথা সত্য নয় যে সে দাবা খেলোয়াড় এবং সে সাঁতারে পটু,

(b) সে দাবা খেলোয়াড় নয় এবং সাঁতারে পটু নয়।

II. (a) হয় সে ভীরু নয় কিংবা সে সত্য কথা বলে না,

(b) এ কথা সত্য নয় যে সে ভীরু এবং সে সত্যবাদী।

4. সত্য সারণির দ্বারা দেখাও যে নিম্নোক্ত প্রতিজ্ঞাগুলি সমতুল্য:

(i) যদি লৌহখণ্ডকে উত্তপ্ত করা হয় তাহলে এর আয়তন বৃদ্ধি পায়,
যদি লৌহখণ্ডের আয়তন বৃদ্ধি না পায় তাহলে একে উত্তপ্ত করা হয়নি।

(ii) যদি আমি তৃষ্ণার্ত হই তাহলে ঠাণ্ডা পানীয় পছন্দ করি,
যদি আমি ঠাণ্ডা পানীয় পছন্দ না করি তাহলে আমি তৃষ্ণার্ত নই।

(iii) যদি $x=1{\cdot}5$, তাহলে $x^2=2{\cdot}25$,
যদি $x^2 \neq 2{\cdot}25$, তাহলে $x \neq 1{\cdot}5$

5. নীচের প্রতিজ্ঞাগুলির কনট্রাপজিটিভ নির্ণয় কর ঃ

(*a*) যদি x জোড় সংখ্যা হয় তাহলে xyও জোড় সংখ্যা।

(*b*) যদি দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হয় তাহলে তারা সদৃশ হবে।

(*c*) যদি $xy=0$ হয় তাহলে $x=0$ বা $y=0$

(*d*) যদি $x^2=9$ হয় তাহলে $x=3$ বা -3

6. যদি $p=$'19 একটি মৌলিক সংখ্যা' এবং $q=$'আইসক্রীম সুস্বাদু' তাহলে নিচের প্রতিজ্ঞাগুলি যথোপযুক্ত ভাষায় প্রকাশ কর ঃ

(*a*) $p\rightarrow q$ (*b*) $p\rightarrow q$-এর কনভার্স (*c*) $p\rightarrow q$-এর ইনভার্স (*d*) $p\rightarrow q$-এর কনট্রাপজিটিভ।

7. (*a*) যদি ছানা ও চিনির দর বৃদ্ধি পায় তাহলে রসগোল্লার দাম বাড়ে।

(*b*) যদি ছানার দাম কমে ও চিনির দাম বাড়ে তাহলে রসগোল্লার দাম বাড়ে না।

(*c*) সস্তা দামের রসগোল্লা সর্বদাই পাওয়া যায় যদি না ছানার দাম বাড়ে।

উপরোক্ত মিশ্র প্রতিজ্ঞাগুলিকে প্রতীক আকারে প্রকাশ কর।

8. (i) যদি $x < y$ ঃ তাহলে $-y < -x$,

(ii) যদি আকাশ নীল ও সমুদ্রের জল নোনা হয় তাহলে প্রতিটি মানুষ দয়ালু কিংবা কর্মঠ।

(iii) যদি পেট্রোলের দাম বাড়ে তাহলে যাত্রিবাহী বাসের ভাড়া বৃদ্ধি পায় না।

উপরোক্ত প্রতিজ্ঞাগুলির ইনভার্স, কনভার্স ও কনট্রাপজিটিভ ভাষায় প্রকাশ কর।

9. নীচের প্রতিজ্ঞাগুলির নঞর্থক প্রতিজ্ঞা ভাষায় প্রকাশ কর ঃ

(*a*) যদি ভাল বৃষ্টি হয় তাহলে ধান ও গমের উৎপাদন বাড়ে।

(*b*) ভাল ভাবে বাঁচতে হলে ধনী হওয়াই যথেষ্ট।

(*c*) দুটি ত্রিভুজের সর্বসমতার প্রয়োজনীয় শর্ত হ'ল ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফলের সমতা।

10. নীচের অপেক্ষকগুলির সত্যতা সেটগুলির ভেন চিত্র অংকন কর ঃ

(i) $q'\rightarrow p'$ (ii) $(p+r)\rightarrow q$ (iii) $p\leftarrow\rightarrow qr$ (iv) $(p+r)\rightarrow q$

11. যদি p ও q প্রতিজ্ঞা দুটির সত্যতা সেট যথাক্রমে P ও Q হয় তাহলে দেখাও যে

(i) $p\rightarrow q$ একটি টটোলজি যদি P সেট Q সেটের উপসেট এবং (iii) **P** যদি Q-এর উপসেট হয় তাহলে $p\rightarrow q$ প্রতিজ্ঞাটি টটোলজি।

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1a (পৃষ্ঠা 9)

1. (iii), (v), (vi)

2. 101, 11, 529, 106, 5505 সেট N-এর পদ, 529 P সেটের পদ, 5505 F সেটের পদ।

3. DEF $\in$ A, PQRS $\notin$ A, $\angle$MNR $\notin$A, S $\notin$ A.

4. (*b*) {T, R, A, N, S, F, O, M, I}

(*c*) {−1, −2, −3, −4 ⋯ ⋯ },

(*d*) {1, 2, 3, 4, 3}, (*e*) {5, 2, 7, 9}

7. (*c*) সেটটি অসীম এবং বাকী সেটগুলি সসীম,

10. {AB, AC, AD, BC, BD, CD}, পদ সংখ্যা 6 ;

11. {*lm*, *ln*, *lp*, *mn*, *mp*, *np*}, পদ সংখ্যা 6, চিত্রটি নিজে অংকন কর।

প্রশ্নমালা 1b (পৃষ্ঠা 11)

1. (*b*), (*c*), (*d*), (*e*)

3. (i) {1, 3, 5, 7}, (ii) {3, 9}, (iii) 10

5. T ও R, Q সেটের উপসেট ; R-এর উপসেট R.

7. 2^5 11. 2^n.

প্রশ্নমালা 1C (পৃষ্ঠা 31)

3. $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$,

$A \cup C=\{1, 2, 3, 4, 9, 11, 7\}$,

$B \cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$

$A \cap B=\{3, 7, 9, 11\}=A$, $A \cap C=\{3\}$, $B \cap C=\{3\}$

$A \cup (B \cap C)=\{9, 11, 7, 3\}=A$,

$A \cap (B \cup C)=\{9, 11, 7, 3\}=A$

$A \cup B \cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$, $A \cap B \cap C=\{3\}$

4. (*a*) $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B=\{3, 4\}$,

$A \cup D=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap D=\phi$,

(*b*) $A \cup C \cup D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap C \cap D=\phi$

(c) $A \cup (C \cap D)=\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $A \cap (C \cup D)=\{3, 4\}$

(d) $(A \cup C) \cap (A \cup D)=\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$,

(e) $(A \cap C) \cup (A \cap D)=\{3, 4\}$,

(f) $A \cup B \cup C \cup D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$A \cap B \cap C \cap D=\phi$.

9. (a) $A \cup B \cup C=\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$,
$A \cap B \cap C=\phi$

(b) $(A \cup B) \cap C=\{15, 16, 18, 19\}$, $(A \cap B) \cup C=C$,

(c) $(A \cup C) \cap (A \cup B)=\{11, 13, 15, 16, 18, 19\}$

(d) $(A \cap B) \cap (A \cap C)=\{15, 19\}$.

10. (a) ল. সা. গু.$=340$; গ. সা. গু $=1$.

(b) ল. সা. গু.$=420$; গ. সা. গু $=5$

(c) ল. সা. গু.$=x^2y^3z^2$, গ. সা. গু.$=xy^2$

(d) ল. সা. গু.$=x(x+y-z)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$
গ. সা. গু.$=(x+y+z)$,

(e) ল. সা. গু$=x^2y^2(x-y)^2(x+y)$, গ. সা. গু.$=(x-y)$.

14. (1) $A'=\{7, 8, 9\}$, $B'=\{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$,
$C'=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $D'=\{1, 2, 3, 8, 9\}$, $\{\ \}$

(2) $A' \cup B=\{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $A' \cap B=\phi$, $A \cup B'=U$,
$A \cap B'=\{1, 2, 6\}$

(3) $B' \cup D'=\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$,
$B' \cap D'=\{1, 2, 8, 9\}$

(4) $(B' \cup D)'=\{3\}$, $(B' \cap D)'=\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$

19. $\{c, d, x, y\}$, $\{d, x, y\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, d, y\}$, $\{d\}$

20. (a) $A'=\{x : x \in N$ এবং $6 < x \leqslant 10\}$,
$B'=\{x : x \in N$ এবং $1 \leqslant x < 6$ ও $x=10\}$
$C'=\{x : x \in N$ এবং $1 \leqslant x < 4$ ও $7 < x \leqslant 10\}$

(b) $(A \cup B)'=\{x : x=10\}$,
$(B \cup C)'=\{x : x=1, 2, 3, 10\}$,
$(C \cup A)'=\{x : x=8, 9, 10\}$

প্রশ্নমালা 1d (পৃষ্ঠা 45)

2. (a) $P \cap P = P$, (b) $A \cup U = U$, (c) $A \cup \phi = A$,
   (d) $A \cap \phi = \phi$, (e) $A \cap U = A$, (f) $P \cup P = P$

5. 4 জন ব্যক্তি দুধ ও চিনি দেওয়া পছন্দ করে।

7. (a) 3, (b) 6, (c) 4, (d) 10

8. (a) $n(Z)=4$, (b) $n(X)-n(Z \cap X)=5-2=3$,
   (c) $n(Z \cup X)-n(Z \cup Y)=7-6=1$,

ভেন চিত্র নিজে অংকন কর।

প্রশ্নমালা 2a (পৃষ্ঠা 99)

12. (i) এবং (ii) সমান।

প্রশ্নমালা 2b (পৃষ্ঠা 148)

1. (i) $f(x, y, z)=xy'z+xyz+xy'z'+xyz'$
   (ii) $f(x, y, z, t)=xy'z't+x'y'zt+xyzt$
   (iii) $f(x, y, z)=x'y'z'+xyz$
   (iv) $f(x, y, z)=xyz+xy'z$
   (vi) $f(x, y, z, t)=xyzt+xyzt'+x'yzt$
   (vii) $f(x, y, z)=x'yz+x'yz'+xy'z+xy'z'$

2. (i) $f(x, y, z)=(x'+y+z)(x'+y+z')(y'+y'+z')$
   (ii) $f(x, y, z)=(x+y'+z)(x+y'+z')(x+y+z')(x'+y+z')$
   $(x'+y+z)(x'+y'+z)(x'+y'+z')$
   (iii) $f(x, y, z)=(x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z)(x+y'+z')$
   $(x'+y+z)(x'+y'+z)$

3. (a) $(x+y+z)(x+y+z')(x'+y'+z)(x'+y'+z')$
   (b) $(x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z)(x+y'+z')$
   (c) $(x+y+z)(x+y'+z)(x'+y'+z')(x'+y+z')$
   (d) $(x+y'+z)(x+y'+z')$

5. (i) $f(x, y)=x'+y$,
   (ii) $f(x, y, z)=(x'+y'+z)(x'+y+z')(x+y'+z')$
   (iii) $f(x, y, z, t)=(x+y+z+t')(x+y+z'+t)(x+y+z'+t')$
   $(x+y'+z+t)(x+y'+z'+t')(x'+y+z+t)(x'+y+z'+t')$
   $(x'+y'+z+t)(x'+y'+z+t')(x'+y'+z'+t)$

6. (i) $f(x, y)=x'y'$, (ii) $f(x, y, z)=x'yz+xy'z'$

7. $f(x, y, z)=x'yz+xy'z+xyz'+xyz$
$=(x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z) . (x'+y+z)$

8. $f(x, y, z, w)=x'y'z'w'+x'y'z'w+x'y'zw'+x'y'zw$
$+x'yz'w'+x'yz'w+x'yzw'+x'yzw$
$+xy'z'w'+xy'z'w+xy'zw+xy'zw$
$+xyz'w'+xyz'w+xyzw'+xyzw.$

$xyz'w$ পদটির মান 1 এবং অন্য পদগুলির মান 0.

প্রশ্নমালা 3(a) (পৃষ্ঠা 163)

1. (a) প্রতিজ্ঞা, (b) প্রতিজ্ঞা, (c) প্রতিজ্ঞা, (d) প্রতিজ্ঞা, (e) প্রতিজ্ঞা নয়, (f) প্রতিজ্ঞা, (g) প্রতিজ্ঞা, (h) প্রতিজ্ঞা নয়, (i) প্রতিজ্ঞা, (j) প্রতিজ্ঞা।

2. (i) মাক্সিম গোর্কির ছোট গল্পগুলি আমার ভাল লাগে না,
(ii) কুকুরেরা প্রভুভক্ত নয়, (iii) সব শিক্ষকরা আদর্শবাদী,
(iv) একথা ঠিক নয় যে আজ বেশ গরম পড়েছে।

3. (i) $p \vee q$: রামায়ণ সুপ্রাচীন কাব্য বা গীতাঞ্জলী কাব্যগ্রন্থ রবীন্দ্রনাথের অন্যতম শ্রেষ্ঠ গ্রন্থ।

$p \wedge q$: রামায়ণ সুপ্রাচীন কাব্য এবং গীতাঞ্জলী কাব্যগ্রন্থ রবীন্দ্রনাথের অন্যতম শ্রেষ্ঠ গ্রন্থ।

(ii) $p \vee q$: দক্ষিণ ভারতের অধিবাসীরা ধর্মভীরু বা 'তাজমহল' সম্রাট শাহাজাহান তৈরী করান।

$p \wedge q$: দক্ষিণ ভারতের অধিবাসীরা ধর্মভীরু এবং 'তাজমহল' সম্রাট শাহাজাহান তৈরী করান।

(iii) $p \vee q$: হিন্দী ভারতের রাষ্ট্রভাষা বা দিল্লী ভারতের রাজধানী।
$p \wedge q$: হিন্দী ভারতের রাষ্ট্রভাষা এবং দিল্লী ভারতের রাজধানী।

4. (i) $p \wedge q$, (ii) $p' \wedge q$, (iii) $p \vee q$.
(iv) $p \vee q'$ (v) $(p' \vee q')'$

5. $p \vee q$: ওষুধ সেবনে রোগ নিরাময় হয় অথবা ডাক্তাররা নির্দয় হয়।

$p \wedge q$: ওষুধ সেবনে রোগ নিরাময় হয় এবং ডাক্তাররা নির্দয় হয়।

$p' \vee q$: ওষুধ সেবনে রোগ নিরাময় হয় না কিংবা ডাক্তাররা নির্দয় হয়।

$p \vee q'$: ওষুধ সেবনে রোগ নিরাময় হয় অথবা ডাক্তাররা নির্দয় হয় না।

$p' \vee q'$: ওষুধ সেবনে রোগ নিরাময় হয় না কিংবা ডাক্তাররা নির্দয় হয় না।

$p' \wedge q'$: ওষুধ সেবনে রোগ নিরাময় হয় না এবং ডাক্তাররা নির্দয় হয় না।

$(p \wedge q)'$: একথা ঠিক নয় যে ওষুধ সেবনে রোগ নিরাময় হয় এবং ডাক্তাররা নির্দয় হয়।

6. $(p' \vee q')'$: একথা সত্য নয় যে সকল বর্গক্ষেত্র আয়তক্ষেত্র নয় বা সকল আয়তক্ষেত্রই সামান্তরিক নয়।

$(p' \wedge q) \vee (p \wedge q)$: সকল বর্গক্ষেত্র আয়তক্ষেত্র নয় এবং সকল আয়তক্ষেত্রই সামান্তরিক অথবা সকল বর্গক্ষেত্রই আয়তক্ষেত্র ও সকল আয়তক্ষেত্রই সামান্তরিক।

$p \vee p'$: সকল বর্গক্ষেত্রকে আয়তক্ষেত্র বলা যায় কিংবা বলা যায় না।

$(p \wedge q') \wedge (p' \wedge q)$: সকল বর্গক্ষেত্র আয়তক্ষেত্র ও সকল আয়তক্ষেত্রই সামান্তরিক নয় এবং সকল বর্গক্ষেত্র আয়তক্ষেত্র নয় ও সকল আয়তক্ষেত্রই সামান্তরিক।

7. (*a*) বরফ ঠাণ্ডা এবং সূর্য একটি তারা একথা ঠিক নয়।
   (*b*) 6-এর সাথে 7 যোগ করলে 13 হয় না।
   (*c*) শীতকালে কমলালেবু খেতে ভাল লাগে না বা চেরাপুঞ্জীতে বেশী বৃষ্টি হয় না।
   (*d*) ভারতীয় ক্রিকেট 1971 খৃষ্টাব্দে ইংলণ্ডের বিরুদ্ধে 'রাবার' লাভ করে একথা সত্য নয়।
   (*e*) 1970 খৃষ্টাব্দে ভারতবর্ষে প্রায় 14,500 পুস্তক প্রকাশিত হয় নি। বা 1953 খৃষ্টাব্দে 'সঙ্গীত নাটক আকাদামী' স্থাপিত হয় নি।

8. (*a*) সত্য, (*b*) অসত্য, (*c*) সত্য, (*d*) অসত্য, (*e*) সত্য, (*f*) অসত্য

9. (*a*) রমেশ ইংরেজীতে বেশ কাঁচা, রমেশ অংকে বেশ কাঁচা।
   (*b*) খবরটি আমি বন্ধুর কাছে শুনেছি, খবরটি আমি রেডিওতে শুনেছি।
   (*c*) আজ আমি ইডেন গার্ডেনে বেড়াতে যাব, আমি আজ বঙ্গসংস্কৃতি সম্মেলনে যাব।
   (*d*) আমি হেঁটে স্কুলে যাই, আমি রিক্সায় স্কুলে যাই।
   (*e*) ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় এক বিন্দুগামী, ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলি একরেখীয় নয়।
   (*f*) ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ, কোন ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য তৃতীয় বাহুপেক্ষা ক্ষুদ্র।

প্রশ্নমালা 3 b)

1. (a)

p	q	q'	$p\wedge q'$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0

(b)

$p\wedge q'$	$p'\wedge q$	$(p'\wedge q)\vee(p\wedge q')$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(c)

$p\vee q$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)'$	$(p\vee q)\wedge(p\wedge q)'$
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0

(d)

$p\wedge q'$	$(p\vee q)'$	$(p\wedge q')'\vee(p\vee q)'$
0	0	1
1	0	0
0	0	1
0	1	1

(f)

$p'\vee q$	$p\wedge(p'\vee q)$	$[p\vee(p'\vee q)]'$
1	1	0
0	0	1
1	0	1
1	0	1

2.

$(p\wedge q')'$	$p'\vee q$
1	1
0	0
1	1
1	1

$\therefore\ (p\wedge q')'=p'\vee q$

4. $(p'\wedge q')'$,

p	q	p'	q'	$p'\vee q'$	$(p'\wedge q')'$
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0

5. $(p'\wedge q)'$,

p	q	p'	$p'\wedge q$	$(p'\wedge q)'$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

যদি p-এর মান 0 এবং q-এর মান 1 হয় তাহলে প্রতিজ্ঞাটির মান 0 হবে।

6.

p	q	p'	q'	$p'\wedge q'$	$p\vee q'$	$(p\vee q')'$	$p\wedge q$	$p\vee(p\wedge q)$
1	1	0	0	0	1	0	1	1

7.

p	q	r	$p\vee r'$	$(p\vee r)'$	p'	r'	$p'\wedge r'$	$p'\vee r'$	$p\wedge r$	$(p\wedge r)'$
1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1

q'	$q'\wedge r$	s	$q\vee s$	$p'\wedge q'$	$r'\vee s'$	$p\wedge(q'\wedge r)$	$p\vee(r'\wedge s')$	$(p\vee q)\wedge(r\vee s)$
0	0	0	1	0	1	0	1	0

10.

p	q	r	s	$p \wedge q$	$r \wedge s$	$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

প্রশ্নমালা 3(c)

1. (a) $p \wedge q$ (b) $p' \wedge q$ (c) $(p \vee q)'$ (d) $(p \wedge q')'$ (e) $(p \vee q)'$

2.

p	q	p'	q'	$p' \wedge q'$	$p' \vee q'$	$p' \wedge q'$	$(p \wedge q')'$
T	T	F	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	F	T

3. I (a) ও (b) একই অর্থবহ নয়, II (a) ও (b) একই অর্থবহ।

5. (a) যদি xy বিজোড় সংখ্যা হয় তাহলে x বিজোড় সংখ্যা
   (b) যদি দুটি ত্রিভুজ সদৃশ না হয় তাহলে তারা সর্বসম নয়,
   (c) যদি $x \neq 0$ এবং $y \neq 0$ তাহলে $xy \neq 0$,
   (d) যদি $x \neq 3$ এবং $x \neq -3$ তাহলে $x^2 \neq 9$

5. (*a*) যদি 19 একটি মৌলিক সংখ্যা হয় তাহলে আইসক্রীম সুস্বাদু,

(*b*) যদি আইসক্রীম সুস্বাদু হয় তাহলে 19 একটি মৌলিক সংখ্যা,

(*c*) যদি 19 একটি মৌলিক সংখ্যা না হয় তাহলে আইসক্রীম সুস্বাদু নয়,

(*d*) যদি আইসক্রীম সুস্বাদু না হয় তাহলে 19 একটি মৌলিক সংখ্যা নয়,

7. p : ছানার দাম বৃদ্ধি পায়, q : চিনির দাম বৃদ্ধি পায়,
r : রসগোল্লার দাম বাড়ে

(*a*) $(p \wedge q) \rightarrow r$, (*b*) $(p' \wedge q) \rightarrow r'$, (*c*) $r' \rightarrow p'$

8. (ii) p : আকাশ নীল, q : সমুদ্রের জল নোনা,
r : প্রতিটি মানুষ দয়ালু, s : প্রতিটি মানুষ কর্মঠ।
$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$

(iii) p : পেট্রোলের দাম বাড়ে, q : যাত্রিবাহী বাসের ভাড়া বৃদ্ধি পায়।
$p \rightarrow q'$

(ii) ইনভার্স : যদি আকাশ নীল এবং সমুদ্রের জল নোনা না হয় তাহলে প্রতিটি মানুষ দয়ালু বা কর্মঠ নয়,

কনভার্স : যদি প্রতিটি মানুষ দয়ালু কিংবা কর্মঠ হয় তাহলে আকাশ নীল ও সমুদ্রের জল নোনা,

কনট্রাপজিটিভ : যদি প্রতিটি মানুষ দয়ালু কিংবা কর্মঠ না হয় তাহলে আকাশ নীল নয় বা সমুদ্রের জল নোনা নয়,

কনভার্স : যদি যাত্রিবাহী বাসের ভাড়া বৃদ্ধি না পায় তাহলে পেট্রোলের দাম বাড়ে,

কনট্রাপজিটিভ : যদি যাত্রিবাহী বাসের ভাড়া বৃদ্ধি পায় তাহলে পেট্রোলের দাম বাড়ে না,

ইনভার্স : যদি পেট্রোলের দাম না বাড়ে তাহলে যাত্রিবাহী বাসের ভাড়া বৃদ্ধি পায়

9. (*a*) একথা অসত্য যে ভাল বৃষ্টি হলে ধান ও গমের উৎপাদন বাড়ে,

(*b*) একথা অসত্য যে ধনী হলে ভাল ভাবে বাঁচা যায়,

(*c*) দুটি ত্রিভুজ সর্বসম কিন্তু তাদের ক্ষেত্রফল সমান নয়, বা একথা অসত্য যে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হলে তাদের ক্ষেত্রফল সমান হবে।

এই পুস্তকে ব্যবহৃত পরিভাষার তালিকা

Set	সেট	Closed w. r. t. addition	যোগসাপেক্ষে বদ্ধ
Equal sets	সমসেট		
Empty set	শূন্য সেট	Closed w. r. t. multiplication	গুণ সাপেক্ষে বদ্ধ
Sub set	উপসেট		
Proper sub set	প্রকৃত উপসেট	Null element	শূন্য পদ
Finite set	সসীম সেট	Unit element	একক পদ
Infinite set	অসীম সেট	Dual	দ্বৈত
Universal set	সার্বিক সেট	Principal of duality	দ্বৈততা নীতি
Disjoint sets	বিচ্ছিন্ন সেট		
Complementary set	পূরক সেট	Definition	সংজ্ঞা
Power set	সূচক সেট	Intuitive definition	সজ্ঞাত সংজ্ঞা
Union	সংযোগ	Formal definition	বিধিবদ্ধ সংজ্ঞা
Intersection	ছেদ	Properties	ধর্মাবলী
Complimentation	পূরণ	Order	ক্রম
Complement	পূরক	Distinct	স্বতন্ত্র
Operation	প্রক্রিয়া	Unique	অনন্য
Unary operation	একপদী প্রক্রিয়া	Undefined term	অসংজ্ঞেয় পদ
Binary operation	দ্বিপদ প্রক্রিয়া	Table	সারণি
Venn diagrams	ভেন চিত্রাবলী	List	তালিকা
Associative law	সংযোগ সূত্র বা নিয়ম	Discrete	বিশ্লিষ্ট
		Discrete mathematics	বিশ্লিষ্ট গণিত
Commutative law	বিনিময় সূত্র		
Distributive law	বিচ্ছেদ নিয়ম	Difference	অন্তর
De-Morgan's law	ডি-মরগানের সূত্র	Algebra	অ্যালজেব্রা
		Boolean Algebra	বুলিয় অ্যালজেব্রা
Idempotent law	আইডিম্পোটেণ্ট সূত্র		
		Boolean constant	বুলিয় ধ্রুবক
Absorption law	বিশোষণ সূত্র	Order realation	ক্রম সম্পর্ক

Variable চল
Boolean variable বুলিয় চল
Function অপেক্ষক
Boolean function বুলিয় অপেক্ষক
Boolean identity বুলিয় অভেদ
Independent variable স্বাধীন চল
Fundamental form মূল আকার
Disjunctive normal form
বৈকল্পিক স্বভাবী আকার
Conjunctive normal form
যৌগিক স্বভাবী আকার
Complete disjunctive normal form
সম্পূর্ণ বৈকল্পিক স্বভাবী আকার
Complete conjunctive normal form
সম্পূর্ণ যৌগিক স্বভাবী আকার
Monomial একপদ রাশি
Polynomial বহুপদ রাশি
Expression রাশিমালা
Single variable এক চল
Two variables দুই চল
Product term গুণ রাশি
Sum term যোগ রাশি
Mathematical structure
গাণিতিক কাঠামো
Symbolic logic প্রতীকী ন্যায়
Mathematical logic
গাণিতিক ন্যায়
Statement উক্তি
Ambiguous statement
দ্ব্যর্থ বোধক উক্তি
Declarative sentence
বিবৃতি বোধক বাক্য
Proposition প্রতিজ্ঞা বা বচন
Simple proposition
সরল বা মৌলিক প্রাতজ্ঞা
Compound proposition
মিশ্র প্রতিজ্ঞা
Algebra of proposition
প্রতিজ্ঞেয় অ্যালজেব্রা
Connective সংযোজক
Logical connective
যৌক্তিক সংযোজক
Negation of a proposition
নঞর্থক প্রতিজ্ঞা
Negation নেতিকরণ
Disjunction সংযোগ
Conjunction বিকল্প
True সত্য
False অসত্য
Truth সত্যতা
Truth table সত্য সারণি
Truth value সত্যমান
Truth sets সত্যতা সেট
Tautology টটোলজি
Contingency কনটিন্‌জেন্সি
Equivalent তুল্য
Antecedent পূর্বগ
Consequent অনুগ

আমাদের নির্বাচিত পাঠ্যপুস্তক

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদের নতুন পাঠ্যসূচী (১৯৭৪) অনুযায়ী লিখিত

॥ নবম শ্রেণীর জন্য ॥

ইংরাজি

A Guide To English Grammar, Composition & Translation : P. Mahato

জীবন-বিজ্ঞান

সহজ জীবন-বিজ্ঞান : ধীরেন্দ্রনাথ গঙ্গোপাধ্যায় ও নরেশচন্দ্র দত্ত

ভৌত বিজ্ঞান

বিজ্ঞান-পরিচয় : অরবিন্দ নাগ ও দেবব্রত নাগ

ইতিহাস

ভারতের ইতিহাস : অসিতকুমার সেন ও পুলিনবিহারী দে

ভূগোল

ভারতবর্ষের আঞ্চলিক ভুগোল : বীরেশ্বর বন্দ্যোপাধ্যায়

India : An Introductory Regional Geography : Dr. S. P. Chatterjee

গণিত

গণিত বিকাশ (১ম) : Mathematical Association

গণিত বিকাশ (২য়) : Mathematical Association

বিশ্লিষ্ট গণিত (Discrete Maths.) : A. I. M. T.

ওরিয়েণ্ট লংম্যান লিমিটেড

A.I.M.T : VISHLISHT GANIT (Bengali)
(Discrete Mathematics for Cl. IX)
1974

Rs. 11·50